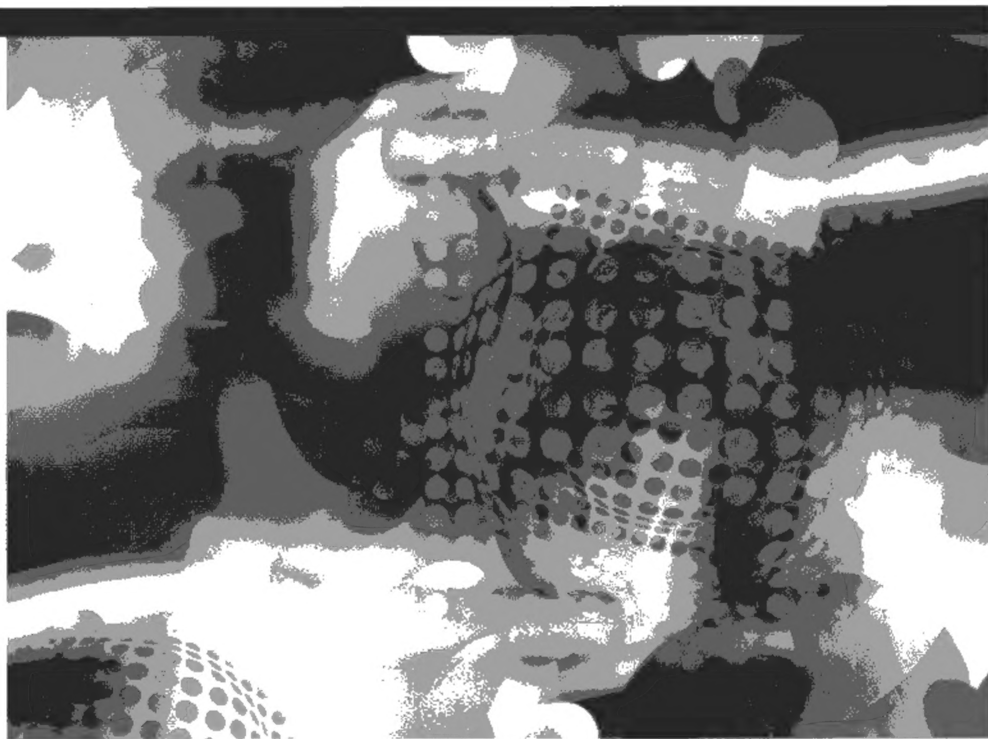


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

数学思想赏析

Appreciation of Thinking in Mathematics



李伟 高隆昌 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



数学方法论应用传播丛书

与名师一起　走进数学

这些作品带您走进数学，理解数学，鉴赏数学，品味数学，直到热爱数学和应用数学，可谓是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

她将引领您在数学的知识王国中遨游，去数学科学的原野上领略百花齐放，领悟数学思想，鉴赏数学之美，挖掘与品味数学与文学艺术中的通性通法，充分感受“无声的音乐和无色的图画”——这一数学科学。

与名师一起，走进数学，品味数学，启迪心智，弘扬数学文化，愿开卷有益。

——徐沥泉 徐鸿超

数学思想赏析
Appreciation of Thinking in Mathematics

本书与读者一起，通过品味数学思想来体会数学与社会生活的关系，感受数学与人类文化，并以此来促进我们数学思维习惯的形成，更好地掌握数学思想，驾驭数学公式；更好地运用数学，驰骋数学世界。


ISBN 978-7-5611-5018-4
9 787561 150184

上架建议：科普读物

定价：25.00元

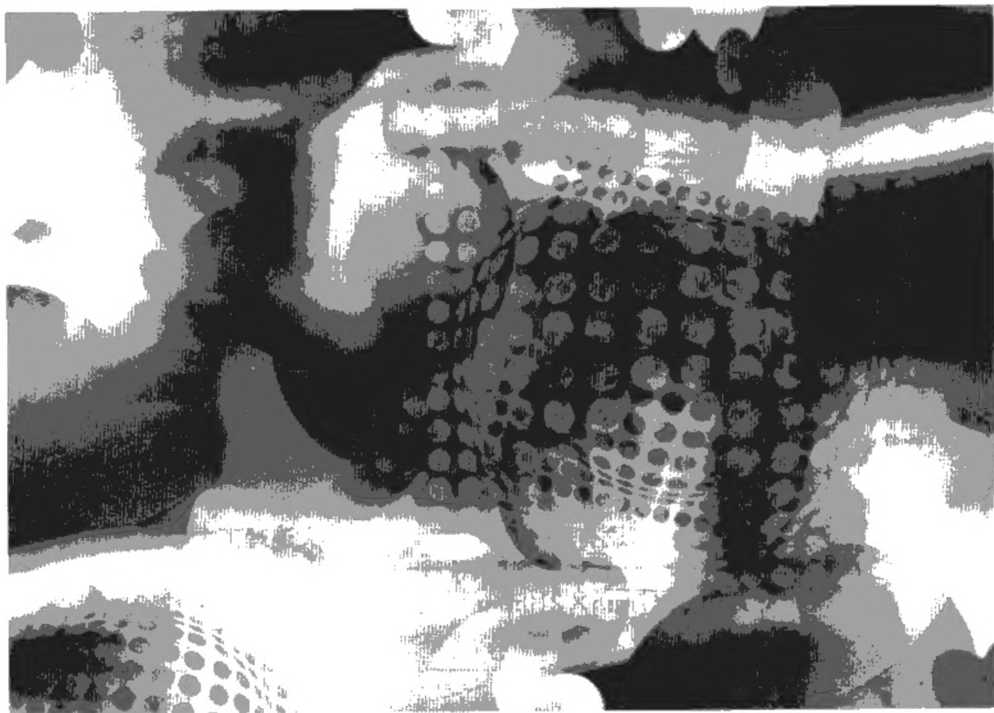


数学方法论应用传播丛书

丛书主编　徐沥泉　徐鸿超

数学思想赏析

Appreciation of Thinking in Mathematics



李伟　高隆昌　著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学思想赏析/李伟,高隆昌著. —大连:大连理工大学出版社,2009.8
(数学方法论应用传播丛书)
ISBN 978-7-5611-5018-4

Ⅰ.数… Ⅱ.①李…②高… Ⅲ.数学一思想方法 Ⅳ.O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 141932 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023
发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:9.625 字数:180 千字
2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:生晶晶
封面设计:孙宝福

ISBN 978-7-5611-5018-4 定价:25.00 元



数学方法论应用传播丛书

编 写 委 员 会

“数学方法论应用传播丛书”题词

推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

总 序

“太湖烟波碧沉沉　渤海嗒淋[1]沁人心.”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了.这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩.

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来.

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”.在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座.尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”.

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意.

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著的《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部"MM 教育方式"雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师和教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的"数学方法论应用传播丛书",终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式：理论与实践》一书的序言．“天下士非一方之士，人伦师乃万世之师．”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝，他们的思想在这套丛书中得以充分体现，以飨读者．作为一名数学哲学工作者，看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳，我感到由衷的欣慰．

丛书共有八本专著和一本编著．《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书，是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》（科学出版社，2003 年 3 月）的姊妹篇，其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录．他们之中有著名学者，大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士；有中、小学的特级教师、高级教师；有享受国家和地方政府特殊津贴的专家，全国模范教师、先进教师和科技拔尖人才．

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作，揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律．数学和文学、数学和艺术都是相通的．

数学是研究抽象事物的，它的抽象性保证了其应用的广泛性．如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题？《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼（抽象）出来的，有一部分是中学数学课堂教学的实例，还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品，颇具特色，也有一定的应用价值．学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能．

数学教育是人类的一件大事．古往今来，许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”. 怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进.”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考. 它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质.

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题. 正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运.《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学. 从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地了解数学及其教学方法.

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出. 可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例. 它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣.

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作. 同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读.

"数学方法论应用传播丛书"的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化. 我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著. 开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现.

林夏水

2009 年 2 月 15 日

前　言

走近数学、
理解数学、
养成数学思维、
欣赏数学的美；
品味数学、
启迪心智、
增强数学修养、
弘扬数学文化.

这就是本书的宗旨.

数学，最终说来还是工具，但我们不能作为工具来学. 从工具的技术动机去学数学是非优的.

当今是定量分析的时代，数学，特别是数学思维对哪个专业都是重要的，也包括哲学与文学.

数学美，数学中蕴藏着丰富的美，但我们需要学会去欣赏这种美.

数学属于人类文化，它是全人类共有的一种通有文化.

客观世界本来没有数，人们的生活却离不开数，更离不开数学. 也许这就是人从本质上区别于不懂得“朝三暮四与朝四暮三”关系的猴类之处吧. 人类社会愈发展将愈离不开数学，社会愈进步愈需要高深的数学. 怎么办？首要的问题是要让数学思想，而不只是一堆堆数学公式，去武装起她的每一个建设者.

数学，学的是公式，用的是思想.

数学，思想重于公式. 不要为其符号语言的形式引偏了我们的注意力.

如何才能树立起数学思维呢？可以从有意识和无意识两个方面去递进. 前者靠的是理性，是思考，是刻苦努力；后者靠的是悟性，是灵感，是潜移默化.

数学崇尚修养、修炼、感悟和领悟.

学了高等数学只是开启了今后工作生涯中继续学习的路子. 本书则是为着这一路子或者沿着这一路子作出一点欣赏性的思考.

本书一大宗旨是想与读者一起，通过对一些数学思想的品味来体会数学与社会生活的关系，感受数学与人类文化，也是为了增进数学文化，并以此来促进我们数学思维习惯的形成，以便更好地掌握数学思想，驾驭数学公式，更好地运用数学，驰骋数学世界.

本书属于大学生的课外读物，但内容起点比较低，具有一般高等数学水平的读者都能读懂. 不过对于大学生来说，其思想高度和看问题的角度也许是较为新颖的，同时也是具有启发性的. 毕竟虽然我们的主要目标是大学生甚至部分中学生，但也只是其中学有余力者和数学爱好者.

感谢著名数学家、教育家、大连理工大学徐利治先生和北京航空航天大学李心灿先生的指导与帮助.

作 者

2009 年 8 月

目 录

赏析一
加、乘数学与客观世界

将看到，整个数学中，甚至整个复杂的客观世界中，种种关系，归根结底皆可显现为一个“加”和“乘”的运算关系，仅此而已. 这也是著名的圣菲研究所(美，新墨西哥州圣菲市)提出的“从简单到复杂”的一种展示，只不过我们这里展示的是复杂中的简单罢了.

换句话说，本章是要揭示这么一个事实：在数学中不管从哪个领域、哪个分支、哪个层次看去，那里的基本运算都是加和乘的. 作为对应，在客观世界不管有多么深邃、多么层叠、多么复杂，那里的基本关系也还是个“加”和“乘”.

而今数学建筑的高塔虽已耸入云天，但垒叠起这层层殿宇除了数和变量等基本元素外，加、乘始终是联络和构建起种种元素的最为基本的“钢筋”. 只是随着建筑的升高，这些加、乘的

“钢筋”亦被抽象、提升到了越来越高、越来越玄的层次罢了.

本章将表明,不仅人类的数学意识、数学运算启蒙于加、乘,而且实数上的加、乘犹如数学的一桩砧木,整个数学都由它生发而成. 其生发方式莫非层层创生概念、构筑台阶,并于其上做加、乘运算而已,旨在通过这一认识诱导读者从一个新的视角去观察世界、透视一次数学、接受一次思维训练,最终增强我们对数学的认识、爱好、兴趣和投入.

1.1 人类社会的启蒙与数的加、乘发生

1.1.1 没有数学人类社会怎样生存

一则“数学故事”说,历史上欧洲曾有人招标过一批书目,其中诸如“没有铁匠人类社会怎样生存?”“没有裁缝人类社会怎样生存?”等等,都有人应标了,唯独“没有数学人类社会怎样生存?”至今没人揭标. 为什么呢? 这是可以理解的.

首先,之所以叫人类社会,根据马克思的定义,它是“人与人之间所有关系的总和”,因此必然少不了这样那样的关系. 特别少不了一种物质“交换”关系(如相互调节余缺)和物质“分配”关系(诸如分配合伙获得的成果等),总的叫做经济关系,否则就谈不上什么人类社会了.

比如,任何高等动物都有其“社会”群落,其中一样有关系,只是没有人类如此丰富的交换、分配关系罢了.

那么,显然在交换关系中就少不了计量,在分配关系中就少不了均等. 这两者的一个公共前提就是量的表示——“数”.

首要的则是数的概念的产生.

要问,为什么人有数的概念,而一般动物却没有呢？直观说来,似乎这就是人区别于其他动物的高级之处.进一步说来,这就是人在进化中产生了能把非数的客观对象在脑子里升华成数的一种智能.这可是非同小可的.正如语言、文字一样,没有脑子里对客观事物的反映、升华和思考,就没有形成语言和文字的动力和需求,也就没有世界上各种各样的语言和文字.数的概念的产生及其表达形式的发生,也遵从同一个原理.

都知道,关于猴子不识数的故事不少,除了"朝三暮四与朝四暮三"的故事外,还有诸如"猴子掰包谷(玉米)"、"峨眉山猴子分肉"的故事等.曾有报载,印度有只猴子看见乞丐讨了钱拿去买糖吃,它也学着讨钱,然后拿去买糖吃.可是不管你给它多少钱,它全部交给卖糖人,也不管手里的是多少钱,只要卖糖人给它一颗糖,它就满足了.可见连猴子这样聪明的动物也还没有数或量的概念呢.

人类最宝贵、最值得珍惜的即是进化产生了量与数的意识(注意到量与数之间也是有微妙差异的.量是对客观对象多少的反映,数是量的具体表示.尽管通常可作等同看待也罢),并且进化得还越来越高级.

1.1.2　从结绳记事到四则运算

本质地说,人类产生的量和数的意识是对客观事物的一种抽象和映射能力,进一步的进化则是产生了用符号来表征数与量的能力.表现为人类一旦有了量的意识即必然需要(且能够)

找出一种表征和表述数的方式.

结绳记事就是这样产生的.

这时的绳"结"就是一种"数"——量的表征.只是还不能算是好的表征方法罢了.显然,寻找数的表征方式比起产生量的意识来,就好像科学创造与技术实现的关系,一个偏"理"(思想),一个偏"术"(技术).

事实上,正出于表述方式的技术性特征,历史上世界各民族都有过自己各种各样的记数方式,如今早已自然地统一到以所谓"阿拉伯数字"作为世界通用的记数法.这是自然选优和淘汰的结果,不必细述了.

值得注意的倒是有了数及记数之后,随之而来的是产生了运算.不管在什么记数法之下,都一样地要产生运算.也不管用什么方式做运算(技术),归结起来,基本上就是一种全世界已自然地统一了记号的加、乘运算.

这就是本章所要专门讨论的加、乘运算.考虑到各自的逆运算——减和除,即成为四则运算了.

将看到,不管世界有多大、多深、多复杂,也不管数学发展的有多高、多玄、多现代,今天看来,他们仍只不过都是些加、乘这两种运算或经过发展、推广和深化而成的罢了.

换句话说,客观世界的基本关系就是加和乘这么简单,客观世界所有关系莫非建立在加、乘这种最原始、人类认识最早的基本关系之上的罢了,如此而已.

所以我们不妨说客观世界就是"加"和"乘"两个基本关系构筑而成的.

在正式讨论本章思想之前，让我们先来欣赏一下布尔巴基的“数学结构”思想吧.

1.2 谈谈数学结构

1.2.1 从布尔巴基谈起

布尔巴基(Bourbaki)既不是一个人也不是一个学派，而是起自20世纪30年代，由法国巴黎近郊一群志趣相投的年轻数学家自然结合成的一个数学沙龙. 他们是一群典型的鼓吹建立数学“象牙塔”，搞抽象化数学的激进者. 的确，在他们的著作中连几何图形也是被摒弃了的. 他们还试图用这一思想重建数学呢.

在科学研究领域，我们支持宽松、自由、开放的环境和气氛，主张应该尊重每个人的志趣和选择. 因此对于布尔巴基行为尽管我们可以不效仿、不赞赏，但也不能否定他们，而且社会还应该给予应有的经费支撑，养活他们.

我们的态度是人类社会养得起也应该养那些思想活跃、敢于探索、不计清贫的人，或许他们还能为人类发掘出一点真金来呢.

的确如此，虽然从总体上布尔巴基行为并没有在数学中产生什么感染作用，但他们也有多项成果已被数学接纳，也为数学宝塔增添了一些点缀. 其中比较典型的一项要算是布尔巴基的数学结构观了.

总体来说，布尔巴基把数学归为三大结构：序结构、拓扑结

构和代数结构. 现分别简述之.

1.2.2 数学的序结构

皆知,数学中最为基本的对象是集合,最为基本的关系是序关系. 那么到底什么是序关系呢?

两个对象,若能归结为大于(>),小于(<),等于(=)三个关系中的任一个,就称它们间存在序关系. 进一步,一个集合中元素两两间皆具有序关系时,叫该集合具有(全)序结构.

显然,客观世界要严格实现“>、<、=”三种关系,只有数量化(经过度量映射)之后才行. 因此说,严格的序结构唯有在数学内才可能实现. 或说(严格的)序结构如果存在,只能是数学独有的.

但即使在数学内,这一序结构也不是桌上的苹果——明摆着的,仅就其概念也是随数学发展而推广、深化、发展着的,归纳起来完全是一门学科的发展态势. 这是因为数学早已不只是实轴上的数学了. 量早已由标量变成向量;空间维度早已由一维变到高维以至无穷维;对象(集合)的元素早已由几何点变到函数直至一般元素、抽象元素;对对象(集合)的研究早已不只针对元素,更要同时考虑集合整体及所有子集等等. 这些都决定着,仅仅只有实轴上的序概念是远远不够的. 因此在数学中先后产生了诸如全序(实为上面定义的序)、良序和半序等概念;在理论上产生了集合上的格序理论;在应用上产生了诸多“序化映射”等.

作为例示,这里仅就序化映射举上几条:

(1)两个同维空间的向量,怎么比较大小? 数学已创造出多

法、向量的分量集之中取最大(或最小)法、加权平均法等等.

(2)社会上琳琅满目的物品,怎么去比较它们?流行的有两种方法:一种是用求(同一种)比例值的方式将各种带量纲的物品非量纲化以作比较;另一种是所谓"定价法",即将每种物品定出个价格来,再按其经济意义作比较.以上两种方法的思想实质都是把对象变换到同一量纲(非量纲也是一种"量纲")下的一维空间来做比较.

(3)体操比赛或文艺表演赛,怎么作出精确比较?这是大家都知道的,总的叫它为统计计量法.

(4)生活中遇到的诸如大小、好坏、轻重以及隶属、包含等比较关系,怎么作严格表示?必然地,也只有(且能)映射到实轴上才行.

总之,不管从客观实际还是数学本身,序关系都是其基本关系.正是在这一机制的推动下,数学各个领域都少不了序的研究和应用.因此把"数学具有序结构"作为其基本结构之一是正确的.

最后让我们来讨论一个问题.根据考察,由于只有实轴(一维空间)才具有典型的序结构,那么是否可以猜测:一切"比较",当且仅当归结(映射)到实轴上来才行.

我们说这种积极猜测的精神是可贵的,符合波利亚"数学是猜出来的"精神,值得发扬.但切忌不能把观察、猜测当事实,不能重蹈两千年前毕达哥拉斯的"有理数猜测悖论"的覆辙(见2.2.1节).对于猜测的东西必须得到理论证明或实际验证才能承认它.

事实上这一猜测若要得到证明还必须附加条件才行.因为在数学中,除了映射到实轴去比较之外,也创造了一些别的比较方法,诸如伪序、拟序和格序等.总的精神是将序概念推广、转移、引申后再应用.可见从推广的意义讲上述猜测并不成立.

1.2.3 数学的拓扑结构

首先谈谈拓扑概念.

通常说的拓扑是拓扑学的简称.拓扑学分为一般拓扑学(又叫点集拓扑学)、代数拓扑学(其前身叫组合拓扑学)和微分拓扑学三大分支.特别地,通常所说的拓扑学即一般拓扑学.这里仅就一般拓扑学(径直叫拓扑学)多说几句.

1. 拓扑学基本概念

(1)拓扑空间:设有开集 Y 和它的元素的一组邻域系 $\tau=\{\tau_i\}\subset Y$,其中 τ_i 皆是 Y 的开子集,若空集$\varnothing$和全集 Y 皆属于 τ,且 τ 中有限个元素的交运算(集合乘)与无限多个元素的并运算(集合加)皆封闭,则叫 Y 为以 τ 为其拓扑的拓扑空间,记为(Y,τ).

(2)拓扑映射(暂把映射理解为函数,讲解见后):简单说一切连续映射都叫做拓扑映射,又叫拓扑变换.拓扑映射是把一个拓扑空间变到另一个拓扑空间.

(3)已看到,所谓“拓扑”实际上对应着四个概念,即拓扑空间、拓扑集(如 τ 又叫拓扑基)、拓扑映射和拓扑学.一般说在应用中根据上下文语境是不会产生混淆的.

(4)拓扑的概念看起来很抽象、很玄,给人一种丈二和尚摸

(4)拓扑的概念看起来很抽象、很玄，给人一种丈二和尚摸不着头脑的感觉. 事实上，正是在这一定义之下才使得拓扑概念的客观背景十分宽广. 这也是一种电视塔越高覆盖面越宽的原理. 拓扑之所以成为一类数学结构，即与其宽泛(从而抽象)的定义有关.

比如，这一来十分一般的集合都可以构造出拓扑空间来，甚至不止一个. 同时，一般的映射都可能是拓扑映射，是因为连续映射十分普遍之故. 反过来也说明，拓扑概念是十分宽泛的.

下面继续认识拓扑作为数学结构的主要特征.

2. 拓扑学的主要特征

(1)拓扑学是分析学与几何学的结合. 作为分析学，它研究数学分析中基本的邻域、聚点、序列、收敛、发散、覆盖、连续、间断和开闭性等概念；作为几何学，它研究广义的几何对象——一般集合，统一叫做“空间”.

(2)拓扑学的“空间”是广义的，从维数讲，包括 0 维(有限点集或无限点集)、有限维到无穷维；从元素对象讲，包括几何点元素、函数元素直至客观世界任意对象.

(3)原则上拓扑学是不依赖于坐标系的. 它的概念和理论直接建立在所谓“邻域”概念上.

(4)拓扑学又被形象地叫做橡皮几何学. 皆因拓扑映射始终是连续的，就像理想的橡皮一样，只要不破裂，怎么绷和缩(映射)都可以. 比如，由此可将所有约当曲线(无自我交叉的封闭曲线)归为同一个(叫做)拓扑类，且说它们都拓扑等价于单位圆.

(5)拓扑既然可变性如此之大，那它作为数学，研究的是什

么呢?

是的,数学虽然变来变去,所求的终归还是不变的东西.那么,拓扑变换中有没有不变的东西呢?

有的,那就是保持拓扑空间中的“洞”的个数不变.还有就是拓扑空间的可度量性(非指度量值)等保持不变.

3. 两则笑话

(1)有人说,“拓扑是什么?比如一个人可以不解开外层衣服就能将内层衣服脱下来,这就是拓扑.”初看起来让人有些好笑,但细想之,还是正确的呐.具体说,他所指的是拓扑映射.比如只要把人体拓扑地缩小,外衣拓扑地阔大,内衣不就能轻易地脱下来了?

(2)根据拓扑的上述“拓扑类”思想,有人说整个人类中所有正常人皆属同一个拓扑类,包括男人和女人,看来也是正确的.也许读者你就是这一拓扑类中的那个“标准人”呐.

4. 拓扑学的实际应用例子

正由于拓扑概念的宽泛性,它的实际应用也是十分广泛的.比如即使复杂的社会也有着深刻的拓扑空间实质,值得从拓扑角度去研究.不过这里只准备就拓扑在工程技术实践中的应用简单谈几句.

拓扑学在技术上最为典型的应用是在电气器材的印刷电路板上.因为在电气(弱电)器材设计中,为实现一组接线头间连线,若能拓扑地摆布在或尽量拓扑地摆布在一个平面上来,然后采用印刷电路板的方式进行生产,是十分优越的.这时增加的线路材料与电耗都十分微弱,却换来的是制作工时、材料和器件体

积的减小，十分合算.

同理，对于建筑上的种种网络线路的布局设计者来说，若能懂得一些拓扑学原理常常也是有用的.

1.2.4 数学的代数结构

从总体上来说，数学就是由代数学和分析学两大类构成的.

分析学是以一般函数为基本对象、微积分为基本手段的研究领域. 它是加、乘四则深化到算术“十则”，再经种种引申、深化而成的.

代数学则不同，它总是加、乘四则及其直接推广，最多是在仅有的 2、3、4 阶代数方程求根公式中用到了乘方、开方和复数而已，说不上什么深化. 尽管说代数学的发展亦如分析学，表现为一层层“台阶”上的基本运算，但如果说分析学的基本运算是深化了的，那么代数学的基本运算就是广化了的，不过始终只在加、乘四则内.

这也是称四则运算为代数运算的原理所在.

既然代数运算仅属基本运算，那么作为数学另一半的分析学的运算，就叫做来自基本运算的深化. 那么这就说明了，“代数学是整个数学的一大基本结构”这种说法是毫不夸张的.

可以说本章的基本内容和基本思想都在于强调数学的代数结构. 反过来说，由此数学的代数结构也支持了本章的思想.

下面，作为本章思想的探讨，我们仍得回来从加、乘运算讨论起.

1.3 加、乘运算:数学的一桩砧木

本节将奠定本章的基石——加、乘四则,并给出数学在加、乘四则这一桩砧木上的生发图描述.

1.3.1 几点声明

(1)在未作特别声明时,所提到的加、乘既是加、乘运算,也代表了它们的逆运算,因此加、乘也叫加、乘四则或叫基本四则、代数运算.至于为什么不径直叫四则而要叫加、乘或加、乘四则、基本四则呢?这完全是为了突出加、乘二运算,其用意随着内容进展即会逐步明白,兹免冗述.

(2)严格说来,在四则运算中乘(除)又是加(减)深化来的.不过基于本章任务,不必从加减说起而是直接从四则起步,这是符合本章意义的.

(3)正如运动必定有个场所一样,数的运算也必定有个"数集"作为其场所.后面将适时介绍到,数学中这一"数集"可分为:基本数集;实数集、复数集、抽象数集;函数集和推广数集;一般元素集四类.它们都是讨论运算时的"前提"性基本问题.总体说来实数集又是最为基本的一个"场所".

(4)为了紧扣论题,也为免繁琐,本章直接以实数集为基础来讨论.关于数的认识进展过程是由"自然数→整数→分数(有理数)→无理数→直至实数(实数集=有理数集∪无理数集)"就不作专门叙述了,仅围绕加、乘运算的推进,需要时再作一些相

应交代.

1.3.2　加、乘四则：实数上的加、减、乘、除

这里直接承认实数上的加、减运算，现在来推出实数上的乘、除运算.

我们知道，同数相加的简化即得乘，只不过这时是一个整数与一个一般实数相乘而已. 因此只要能把整数因子推广至一般实数，即成为一般两个实数因子的乘法了.

为此，设 $\mathbf{N}$ 表示自然数集；$\mathbf{Z}$ 表示整数集；$\mathbf{R}_r$ 表示有理数集；$\mathbf{R}_i$ 表示无理数集；$\mathbf{R}$ 表示实数集.

这时如果在 $\mathbf{Z}$ 内做四则运算，即会将数的概念自然地推广到 $\mathbf{R}_r$，而在 $\mathbf{R}_r$ 内做四则运算，$\mathbf{R}_r$ 却不会得到推广. 这时，$\mathbf{R}_r$ 叫做是对四则运算封闭的.

那么，怎样才能将整数因子推广至实数因子？为此只需将有理数的概念推广至 $\mathbf{R}_i$. 不过这时须得借用一个定理.

定理 1　任意无理数 x(表作 $\forall x\in \mathbf{R}_i$)皆存在非唯一的有理数数列$\{a_n\}$($a_n\in\mathbf{R}_r, n=1,2,\cdots$)收敛于它，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x$.

该定理在一般高等数学教材中都有证明，这里免述.

事实上我们知道，无理数是“无穷不循环小数”，若记某无理数为 $a_0\cdot a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，则以此即可分出很多很多个(有理数的)无穷数列来，如$\{a_0, a_0\cdot a_1, a_0\cdot a_1a_2, a_0\cdot a_1a_2a_3,\cdots\}$即是其中一个，它们都是收敛于同一个无理数的.

现在看到了，定理 1 中的极限过程全是在有理数集上进行的，却最后达到的是无理数. 那么将其用到上述数乘上来，只要

再补充如下定义即可.

定义 设 $b\in\mathbf{R}$，b 是常数，$x\in\mathbf{R}_i$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$，则有乘积 $xb=\lim\limits_{n\to\infty}a_nb$.

由此即将有理数上的乘运算深化到无理数上去了. 我们把通过极限手段得到的推广叫做一种深化. 这时再注意到有 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_r\cup\mathbf{R}_i$，即得到两个实数因子的乘运算了.

又因非零实数的倒数仍为实数，则实数的除法也就得到了.

特别地，由此便得到整个实数集上的四则运算了.

1.3.3 数学基于加、乘四则的生发图

本节勾画出本章所要阐述的基本思想和基本思路. 总地可归结为图 1-1.

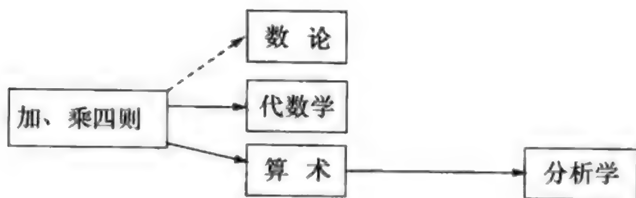


图 1-1

已经看到，加、乘概念在数学中的扩展可有多个途径，但主体的只有两大途径：一个是代数学，可叫做加、乘概念的推广、扩张途径；另一个是算数途径和其上的分析学途径，共同的特点可叫做加、乘概念的深化和升华途径. 实际上每一途径都是数学中一大领域，且都在逐级分化和发展着. 不过下面仅就第二途径（代数学）、第三途径（算术）和第四途径（分析学）予以逐级讨论，

对于相对较弱的第一途径(数论)，只需在这里补充几句即可.

数论全称整数论，是从古典算术和古典代数中析出的一支数学. 数论的古典算术特征即其基本运算是加、乘四则；其古典代数特征即它也研究“代数方程”，只不过是一种特殊的代数方程，具体叫做不定方程，如多个未知数的多项式求整数解和同余方程求整数解等即是.

不定方程又叫做丢番图方程，也说是未知数个数大于方程个数的代数方程. 如历经三百余年才解决的赫赫有名的“费马猜测”：$x^n+y^n=z^n$，其中，x,y,z 为非零未知数，n 为给定的自然数，当$n>2$时没有整数解.

这也是个典型的丢番图方程，自费马(P・Fermat，法，1601—1665)提出并于1670年由其儿子发表后，直到1994年才被A・怀尔斯解决. 在三百余年的求证过程中留下了不少动人的故事，想必已尽人皆知，兹免赘述.

数论有几大特点[illegible]不易出(成果). 历史上不知有多少中学生和社会青年被它诱骗过，纷纷落得个“乘兴而入，败兴而出”；②技巧性很强. 数论的结论往往看起来简单，好像就在身边，唾手可得，却并不容易，主要体现为技巧性的创造很强. ③被誉为既老又新的学科. 皆因其不仅自己能有不断的产出被其他学科取用，自己也不得不广取诸学科的成果以为己用，所以始终处在前沿，具有新兴活力，因此说它新.

下面我们按照先讨论代数学然后讨论函数的总体思路进行.

1.4 代数学及其加、乘运算

已经知道，代数学的运算是十分基本的，只不过是些直接的加、乘四则而已. 那么现在我们只需着重就代数学本身作一简述即可实现对其加、乘四则的揭示了.

代数学分为古典代数学和近世代数学两大分支.

1.4.1 古典代数学

古典代数学是研究直接建立在实数集上的(即实系数的)有理式和多项式(总称代数式或代数函数)的学科分支. 其中又以多项式为基础.

对于多项式的中心问题是求多项式的根，或说解(令多项式等于 0 的)代数方程. 代数方程分为多元线性方程组、一元高阶方程式和多元高阶方程组三类.

代数方程属于(其解为数值的)数值方程，并且是数值方程中的主流.

在三类代数方程中，以线性方程组的解，包括解的方法和理论，最为丰富、最为成熟. 比如围绕着解的方法有行列式理论和克莱姆法则等；围绕着解的理论有矩阵理论、线性空间理论(见赏析二，例 2)等.

对于多元高阶方程组的研究则很难，被纳入专门的几何代数和几何数论等分支领域去研究，甚至有人称它为“魔鬼”的数学，目前进展较为缓慢.

对于一元高阶方程式理论，又简称代数方程式论或方程式论. 已证明它的5阶及5阶以上的方程没有一般的显式解. 尽管其解的存在性已被肯定. 这是因为，据欧拉的代数学基本定理，"实系数 n 次代数方程必存在 n 个根，包括复根和重根的重数".

基本定理解决的是(代数方程式)解的"存在性"问题，而求出代数方程式的(显式)解属于解的技术实现问题. 存在性与可实现性不仅具有不同性质的困难，而且是两码事. 即使知道它"存在"，也不一定能实现得了.

由于高阶方程一般没有显式解，对于高阶方程没有更多理论，不过在其仅有的理论中，有两点是十分绝妙的：

(1)利用"高阶方程没有显式解"这一事实(属逆向思维). 由于"高阶方程没有显式解"等价于相应高阶多项式不能有效地分解成一次因式(在复根意义下)之积，或一次、二次因式(回避复根)之积. 那么，将它用于通讯密码编制则十分得力. 如今尽管它已受到了高速计算机的挑战，仍没有真正动摇它的实用保密性.

(2)正是在当初数学苦苦探索高阶方程解的迷惘中，伽罗瓦(E・Galois，法，1811—1832)"意外"地给出代数学一个石破天惊的突破——凿开了近世代数学的一扇门窗.

1.4.2　近世代数学

应该感谢伽罗瓦，他在1832年赴决斗场的前夕，因情敌是个军人，预感不妙，将其记录的数学新发现底稿交了出来. 要不，近世代数的诞生日还不知会延迟多久呢.

说来也简单，伽罗瓦只是在"不经意"之中发现，5次方程5

个有序根的总体(集合)具有一个“小小”特点：

任意置换两根之位置后仍然是其根之集合.

换句话说该“根集合”的序结构对于置换这一“运算”是封闭的.

进一步，这就启发敏锐的数学家一般的考虑对某个单一运算封闭的集合. 由此很快推进到对乘(除)运算封闭集合的研究. 这就是“群论”的来历.

群论发展很快的一大原因是其实际应用对它的推进，比如先后产生了置换群(伽罗瓦群)、交换群(阿贝尔群)、运动群、连续群(又叫 Lie 群)等，都是有其很强应用背景的群论分支.

更值得一提的是，受此启发在数学中迅速创生了诸如环、域、体、代数、线性空间等理论来. 终于形成一个宏大的近世代数体系，并继续往所谓抽象代数、数系理论的纵深发展. 以至今天直接称近世代数学为代数学.

当注意，一个时代中任一门科学，只有它的主流学科才能被赋予这门科学的简单称谓. 可见在当代，近世代数学已被公认为主流学科了.

归结起来，近世代数学具有如下特征：

(1)近世代数较之古典代数，从任务到对象以及应用特征等，都是完全不同的；

(2)近世代数研究一般集合，表现为它的元素是一般的，即不只是数，更可以一般的表示客观世界中任何对象.

(3)对于所考察的一般集合，应看其是否能赋予某种运算. 特别注意到这时的运算是需要“赋予”的. 那么，怎样赋予呢？

(4)应该对照实数集上相应运算所满足的各条定律，一条条考察它在此“一般集合”上是否能够被定义(即是否能基本上满足数集上相应定律或经适当修正后能满足数集上相应定律).换句话说，所谓赋予某个运算，实际上是以定义(赋予)该运算的各条“运算定律”(又叫运算公理)来体现的.

(5)正因如此，在说到某某集合上有(赋予)某种运算时，必须同时表示出该运算的各条定律来.

例 1　群的定义.

群是这样的集合 X，在其上对于运算“$\cdot$”封闭(又叫满足运算“$\cdot$”)，亦即满足：

(1)在 X 上满足结合律.即设 $a,b,c\in X$，有 $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$；

(2)X 中存在幺元(又叫单位元)，可记为 θ，满足 $\forall x\in X$，皆有 $x\cdot\theta=x$；

(3)X 中存在逆元.即若 $a\in X$，则有 $a^{-1}\in X$，使 $a\cdot a^{-1}=\theta$.这时，关于 X 的群可记为$(X,\cdot)$.

特别地，当运算“$\cdot$”不满足(2)、(3)时，可记为运算“$\circ$”，这时把$(X,\circ)$叫做半群.

说明：初看起来这一定义似有些抽象，比如“$\cdot$”究竟是加、减、乘、除中哪种运算？弄不清楚，倒像有点故弄玄虚.其实：

① 这里“$\cdot$”用到数集上时，既可表加(及其逆减)，叫做加群，又可表乘(及其逆除)，叫做乘群.只是随着“$\cdot$”表加、乘的不同，θ 应分别为 0 和 1；a^{-1} 也应分别为 $-a$ 和 $1/a$ 罢了.

② 即使“$\cdot$”用到数集上，仍可表非加非乘的运算.比如数集

$\{a, b, \cdots, k\}$中任两元素位置的一次“置换”都是一次运算. 显然它既不像(数)加又不像(数)乘，可也是一种运算呀.

③ 更何况“·”可表示 X 为运动场上运动员的“运算”，也可表示 X 为晶体时的晶格演变，如此等等.

看来抽象表示的确有适应面宽、覆盖面大的好处.

例 2 线性空间概念.

抽象定义：简单说，当 X 是个(交换)群，且对 $\mathbf{R}$ 上数的数乘(记为 $*$)满足结合律和分配律时(即设 $a, b \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$，有$\alpha\beta * a = \alpha(\beta * a)$和$(\alpha+\beta) * (a+b) = \alpha * (a+b) + \beta * (a+b) = (\alpha+\beta) * a + (\alpha+\beta) * b)$，$X$ 即为线性空间，记为$(X, *)$.

说明：①这里的定义看似简单，但这是建立在群概念上的结果，若把群的定义式一起写进去就不简单了. 为什么不简单呢？皆因这时 X 表示的是一般集合，在赋予它运算时必须界定各运算定律才行.

②仅当 X 为实数集时，定义于其上的线性空间才是简单的. 因为这时只需说成：系数取自 $\mathbf{R}$ 的 X 上向量满足加减运算时，即为线性空间. 原因是既然是数的运算，只要说到是什么运算，相应的运算定律即会自然满足. 但一般集合上的运算就不能这样，而需要特别“赋予”了.

③特别看到，今天的大学基础教程“线性代数”中讲到线性空间定义时，不厌其“繁”地罗列了 8 条定律，这是为什么呢？这是因为那里说的线性空间指的是一般集合，已经超越了数的、欧氏空间的“向量空间”层次了. 但那里还没有群概念垫底(没有讲群概念)，因此只能从最基本的运算定律叙述起(见 2. 1. 2 节，例

1).

最后来回顾一下即可看到，前面提到的代数学所用到的只是代数运算，而代数运算特别是近世代数的只有加、乘四则，甚至只用到加、乘四则的一部分，这的确是事实.

1.5　加、乘概念的应用性推广

随着数学研究领域的扩展，加、乘概念及其运算方式也在扩展. 由此亦表明即使扩展了的数学也是以加、乘四则为其基本运算的.

本节拟简述几类常见的扩展类型.

1.5.1　集合的∪、∩运算

在集合论中，有关集合或子集之间的并、交运算，分别记为∪和∩. 已经知道它是数的加、乘运算推广而来的，但也须注意它只是其“思想”的推广，与数学的加、乘本身却是十分不同的（注：任何两个概念，当其认为它们比较接近时应尽量找出它们的差异点；当其认为它们很不相同时应尽量寻找它们的相似处.）.

这里谈谈相对于加、乘运算，并、交运算的特征.

(1)并、交运算是针对集合或子集来界定的，尽管说元素在某种意义上也是个(特殊)子集，但这里毕竟不是针对集合基本元素来界定的.

(2)并、交运算是根据集合关系的客观实际独立给出的定

义，是一种重新发现，并非比对着既有的数的加、乘运算做出的“移植”.

(3)比如“$1+2=3$”，这在实轴上是(区间)集合$[0,1]$和$[0,2]$长度之和，但它不是作为集合之“和(并)”. 其集合之“和”应为$[0,1]\cup[0,2]=[0,2]$. 由此得出“$\cup$”运算中，两集合间重叠元素只计一次，即若设a_1,a_2为两个集合，则有$a_1\cup a_2=a_1+a_2-a_{12}$，这里“$+$、$-$”是特别的加、减号自明，$a_{12}$为重叠元素集$a_{12}=a_1\cap a_2$.

(4)集合间也有减和除的运算，分别记为 $\backslash$ 和 $/$，不再细说了.

例 对于集合X，记其一切子集(包括空集$\varnothing$和全集X)之集为2^X，叫做X的幂集，则在2^X上存在$\cup$、$\backslash$、$\cap$运算，从而可在2^X上定义群和环. 由此可见集合运算也属于代数运算.

1.5.2 逻辑的$\vee$、$\wedge$运算

客观世界一切事件、一切现象都是逻辑的产物，即符合逻辑的存在. 说“精神病人行为不合逻辑”本身也是一个逻辑结论.

通常说的逻辑系指当前逻辑学的主流学科——形式逻辑. 从范畴上讲，整个数学都是逻辑的，所以也说$\vee$、$\wedge$运算是数学加、乘运算典型的推广. 并且随着逻辑学分支的不同，这一推广的$\vee$、$\wedge$运算也有些差异. 这里仅举出几个主要的方面.

1. 布尔(Bool)代数中的$\vee$、$\wedge$运算

布尔代数又叫布尔逻辑，是1847年由布尔和D·摩尔根给出的一个代数系统，记为$(X,\vee,\wedge)$. 亦即布尔代数是一个具有

运算$\vee$、$\wedge$的一个集合 X . 所谓“具有运算$\vee$、$\wedge$”是指其满足一组确定的运算定律，这里免于冗述.

例　最初的布尔代数系统是一个电器模型$(\{0,1\},\vee,\wedge)$，即这里 $X=\{0,1\}$，两个元素 0、1 分别代表开、关，运算$\vee$、$\wedge$分别叫做“或”、“与”，虽然这只是个“最粗”的布尔代数，但至今它在包括计算机的电器理论上都还是十分基础的.

2. 数理逻辑中的$\vee$、$\wedge$运算

在数理逻辑中，$\vee$、$\wedge$运算分别叫做“析取”和“合取”. 数理逻辑学是个大的门类，它的各个学科分支都以$\vee$、$\wedge$作为基本运算，除了命题逻辑和谓词逻辑外还包括格值逻辑、模糊逻辑等都是这样的.

所谓“逻辑代数”，是因为逻辑运算就是代数运算. 既然如此，逻辑学的加、乘运算实质即谓明显了.

例　格值逻辑. 对于 X，若 $\forall a,b\in X$ ，有 $a\vee b=\sup\{a,b\}\in X$，$a\wedge b=\inf\{a,b\}\in X$，则称 X 为满足这里$\vee$、$\wedge$运算的格，又叫格值逻辑，记为$(X,\vee,\wedge)$. 可见，在格值逻辑中，$\vee$、$\wedge$运算又被定义为取上确界、下确界 “运算”了.

1.5.3　数学中加、乘形式的推广

数学中正统的运算是对于数的加、乘$(+,\cdot)$. 除此之外，还有不少关于非数的，推广加、乘概念的加、乘运算，这里仅举一些常见情形.

1. $\oplus$，$\otimes$运算

在现代数学中引入了$\oplus$——直和，又叫 Whitney 和；$\otimes$——

张量积. 前者是 Whitney 于 20 世纪 30 年代提出的,系同一底空间上不同向量之间的一种空间结构表示. 后者是张量分析中张量空间或张量(多重线性泛函)间一种乘运算,这里仅点到为止.

2. 叉乘"×"

叉乘又叫叉积、向量积,来自物理空间($\mathbf{R}^3$)中向量间的一种"右螺旋"关系,又叫"右手系",比如电磁场、引力场等多种物理场的定向规律即如此.

叉乘含有两个要素:一个是乘积值,等于两向量的模(即长度)的积再乘以两向量夹角的正弦,如图 1-2 ,即为 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin\theta$. 另一个是方向,取决于两向量的顺序及"右手定向法则".

叉积"×"与数量积"·"(简称数积,又称内积)在其几何表达式上仅表现为一种对偶差异(仅正弦、余弦因子不同,见图 1-2),但二者的方向性差异却是实质性的. 也因为叉乘有方向性,使得叉乘不能像数乘那样可以推广到任意维空间去.

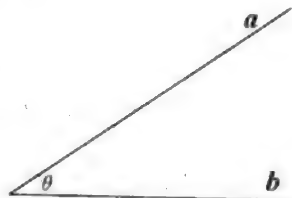


图 1-2

3. 外积"∧"

外积又被形象地叫做尖积,用在张量分析式中. 它是叉积思想的一种推广,比叉积来得弱一些. 也要注意到同在张量分析中的两种乘运算∧与⊗的区别. ∧是用于算式中的,要参与运算;⊗只用于空间或向量间一种关系表示,一般不参与运算.

1.6　算术:加、乘运算的一个深化途径

现在进入加、乘四则这桩砧木往分析学这一分枝上的深化过程讨论. 仍然按图 1-1 中的途径,将其分为算术中的深化阶段(本节)和函数中的深化阶段(下两节)等三节来叙述.

顾名思义,算术即数的运算技术. 它有十种(4+4+2)基本法则,总地叫它们做算术十则. 前四则是数学中最为基础的、启蒙的运算,已经在 1.3 节作了基础性地讨论. 这里只需讨论“中四则”和“后两则”. 其中又只有中四则是直接建立在实数集上的,后两则是新加入的(将有说明). 现分段述出.

1.6.1　中四则:基本四则向乘方、开方、指数、对数运算的深化

亦即考虑由(基本)四则向八则的深化过程.

首先知道,同数相乘得乘方,又叫乘幂. 即若设 $a\in\mathbf{R}$,则将 a 自乘 n 次便有 $a\times a\times a\times\cdots\times a=a^n$, $n\in\mathbf{N}$,叫 a^n 做 a 的 n 次幂(或叫 n 次方). 又已知,实数的任意次乘方还是实数,所以必有 $b\in\mathbf{R}$,使得 $a^n=b$,这一来就容易讨论乘幂的逆运算了.

这时可形式地表为 $a=f\ (b,\ n)$ (a 为 b、n 的一个函数表达式),事实上该式已被规定为 $f(b,n)=\sqrt[n]{b}=b^{1/n}$. 于是这就得到了通常意义下的乘方、开方形式了. 它的特征是只保证其底数(如上式中 a)为实数,其指数被限定在整数甚至自然数范围内(因为负奇数会引起实数的突破,产生所谓“虚数”而进入“复数”领域,这里免述).

那么，是否可以再推进到指数为实数的情形？我们说是可以的，这就进入到指数、对数运算问题了.

为此，接续上式 $a^n=b$ ，如设有 $b=k^m$，$k\in\mathbf{R}$ 则必有 $a^n=k^m$，从而有 $a=\sqrt[n]{k^m}=k^{\frac{m}{n}}$ 和 $k=a^{\frac{n}{m}}$. 于是乘幂问题即由自然数（或整数）进展到有理数了. 这时再用 1.3 节定理 1 的有理数列及其极限概念，即可在深化的意义下实现以实数为指数的运算，叫做指数运算. 其一般形式为 $a^x(=y)$，$a,x\in\mathbf{R}$（自然也有 $y\in\mathbf{R}$），再从中表（解）出 x，若记为 $g(y,a)$，则 $x=g(y,a)$ 即为指数运算的逆运算（形）式.

不过若要求出 $g(y,a)$ 的具体表达式来，则要比上面求乘方的逆运算式难得多.

十分走运的是，这时正好发现，不久前（1614 年）由内庇尔（John Napier，英，1550—1617）为解决另一问题（三角函数的计算）而发明的“对数”，恰好就是指数运算的逆运算.

今天我们可以看到，当初对数的发明给数学带来的贡献不仅在于它是指数运算的逆运算，更在于它所首创的作为查对工具、帮助计算的“对数表”，其思想为后来的诸如概率统计表、微积分表等所采用.

对数的第三个贡献是其“自然对数”表示法，它使得高等数学中一大类积分问题得以解决. 甚至有人说没有对数，积分学即难以形成. 由此，对数还被誉为初等数学进入高等数学的标志之一.

结合到我们这里来说，内庇尔的发明是给出了 $g(y,a)=\log_a y$ ，a 称为底数，y 称为真数. 特别地，由于有底数换算公式

(换底公式)$\log_a y = \log_b y / \log_b a$，所以可将底数确定为统一的底数，并已约定为10(相应对数叫常用对数)和e(相应对数叫自然对数)．当然通常还要求底数、真数非负，不过这仅仅是从实际意义来作出的限制罢了，并不具有逻辑的实质性．

至此可说，在极限意义下加、乘运算已被深化到了(实数集上)八则运算．不过将看到，这里的“极限”还只是运算深化的“一种”情形．

同时要强调，上述八则运算都是直接建立在实数集上的；这里没有讨论复数域上的运算，关于复数及三角函数等的讨论留到3.5节．

此外，后续讨论到的运算也不再是直接建立在实数集上的了．

1.6.2　后两则：微分、积分运算

传统认为，算术运算就是前八则．近来有人主张把微积分运算法则也归入算术运算法则，共十则．我们说从某种意义上是正确的，但并非完全合理，所以只能作有条件地赞同．

赞同在于微积分运算主要表现为一套法则的应用，就像前八则运算一样十分方便．同时它的形成亦跟前八则运算一样，仍只需加、乘和极限的运用即可得到．再则，微积分在函数的分析学中(见下两节)也与四则、八则一样，用得十分基本和普遍．

不能完全赞同的地方在于前八则是直接建立在 **R** 上的运算，而这后两则是直接建立在函数上的运算．比如对于函数 $y=f(x)$，其导数虽然只是一个差商的极限：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

其微分只表现为导数形式的改变：

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=f'(x)\mathrm{d}x$$

但注意到这时运算的直接对象已是函数而不是实数了.

至于其积分.关于不定积分(求原函数) $f(x)=\int \mathrm{d}y$，它是微分的逆运算，只需先“猜”出一个原函数，再用微分法作“还原检验”即可得出，无须新知识，不必讨论了.现在看看定积分，如上述微分式在区间$[a,b]$上的积分：

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_a^b \mathrm{d}y\\&=\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\substack{n\to\infty\\(\max(\Delta x)\to 0)}}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\Delta x_i\end{aligned}\qquad(1\text{-}6\text{-}1)$$

可知，尽管其形式有些繁杂，但仔细看来仍只是乘和加之后再求个极限(极限存在)而已.可是也要注意到这时仍只是直接对函数(见下节)来说的，比起前八则来是另一类深化情形.

总之，虽可说微、积分算式也是四则运算加上极限运算，这点与前八则相仿，但它们建立运算的“场所”却是不同的，一个是实数，一个是函数.

不过由于微积分概念和方法运用之普遍性，下面到处都会遇到它，所以把微积分的加、乘实质放到这里来预先叙述，也是有好处的.

1.7 数学自算术往函数发展的前期准备

已知算术(前八则)运算是直接建立在数集(具体说是实数集)上的,或说是直接在实数集上进行的,但在数学中"数集"仅仅属于基本层次,算术运算也仅仅是基本运算(数的运算).而数学中更大量的运算尽管也属于加、乘运算,具有加、乘实质,但已不是直接建立在实数集上的了,而是由这种"数"集经过一次甚至多次深化后的抽象集了.统一叫这些抽象集为函数集.

1.7.1 数学的深入需要一层层的"函数"台阶

数学既然保持了加、乘运算的实质,那它是怎样体现数学的深刻性呢?

玄妙之处正在于层层深入的函数(集)创造.或者说数学是牺牲了函数层次的简单性(不简单)来保住了运算简单性的.抑或说数学是把复杂性集中到了各层函数的构建,而保住了各层上加、乘运算简单性的.但它为什么要这样呢?这里拟从如下两个方面作一简要解释.

(1)皆知,数学是研究整个客观世界的(包括物质的、社会的和信息的)共同工具.也就是说数学不仅仅是研究物质世界的自然科学工具,还是研究社会科学包括人的精神世界(表现为人文)的工具.固然,它作为研究物质世界的工具是最为典型的,正如伽利略所说,"自然之书,数学写成."那是因为数学中的数,直接来自自然;数学的坐标系(见下段)直接反映的是物质(局部)

空间(或其维数的推广).这些也都是数学中实数集的客观基础,因此相对说来数学在反映物质世界上是更为直接的,因而更容易提高精度.

但是,对社会系统、精神世界和人文对象的描述,就不那么容易了.直观亦可见,要把社会事物或精神对象反映成数或反映到数学坐标系中来,显然不是那么直接的了,而且也不是容易提高精度的.因此为了提高精度,也为了运算的简便,有必要在数集之上建立新的(往往是更抽象的)"数集".

(2)在数学内部,特别是纯数学中,常常需要探讨更为深刻的问题,但这不是直接站在实数这一台阶上即可"够得着"的.这时需要创造一个、两个,甚至多个台阶才行.那么我们说这些"台阶"就是起自实数却又升离了实数的,经过了一层层抽象的"数集".它能使得在最后一层台阶的"数集"上做加、乘运算,即可解决问题了.

当然这些"台阶"的建立可不是容易的,数学的创造往往表现在这些地方.不过这不是我们这里要正面讨论的.

回到我们的"台阶"论之后,我们的任务不必去分辨各台阶上的"数集",只需笼统地将这些台阶上的"变数"叫做"函数"来讨论即可.

1.7.2 坐标系:承载函数概念的伟大发明

若问什么是函数?人们都会正确地说,函数是由自变量经一定的法则表现出来的变数(因变量).比如按指数法则(指数式)表出的函数 $y=a^x$(a 为常数,x 为自变量)叫做指数函数;按

对数法则(对数式)表出的函数 $y=\ln x$ 叫做对数函数(自然对数)等. 它们似乎与坐标系没多大关系,其实不然. 即使“函数”概念也只是在坐标系发明之后,在坐标系中接受启发之下才产生出来的. 包括来自算术法则的简单的指数函数、对数函数都是这样的.

由此可见坐标系的发明对于函数的研究是何等重要了.

(注:虽然从总体上说,数学是发现而不是发明,但不能不看到,数学在发现的道路上遍布着发明. 为了发现也需要发明,坐标系的产生即属一种发明.)

的确,在今天我们不能不感叹,“没有坐标系的被创造发明,就没有函数、就没有分析学甚至没有现代数学”.

当然,历史唯物主义地说来,也不可能到今天还没有发明坐标系. 科学上任何一项大事件的发生都是有其时代性的,是随着大科学的整体进程而必然发生的. 仅仅是发生在张三身上还是发生在李四身上,是早些年发生还是晚些年发生这些才是具有一定偶然性的.

在今天看来,坐标系,特别是直角坐标系十分直观、十分方便,谁都会作. 比如,任意画一矢,其上任意一点记为 0,于其正侧任取一小段端点记为 1 即得到一个一维坐标系——实数轴了. 也叫它做一维坐标空间(常常简称一维空间). 何其简单! 但是要问,一矢何意? 这可是个创造了. 为何 0(原)点可以任意取? 为什么只要在 0 的正侧取个 1(或在其负侧取个 -1)即说得到了一个一维空间的量化表示—— 一维坐标空间了? 这里既有深刻的哲理,又有多种技巧和创造,十分值得玩味,请读者亲自品尝.

坐标系是著名数学家、哲学家笛卡尔(R·Descartes,法,1596—1650)于1619年冬季发明的.那时他还是一名军官,由于冬季军训少,有时间静下来整理他长期以来琢磨的一个数学问题——把初等几何代数化,也就是今天的解析几何学.忧则生梦,在1619年11月10日晚上,笛卡尔连续做了三个都是关于解析几何的祥梦(也因此11月10日被誉为解析几何生日).值得一提的是,受此梦的启发他创造出了一个作为创立解析几何学工具的"坐标系".更值得庆幸的是,这一坐标系不仅作为得力工具而创生了解析几何学,更加成为整个数学的共同工具和基本工具.

如今坐标系从概念到形式都得到了长足发展.

这里不能不提到的是,笛卡尔不只是一位数学家,还是一位赫赫有名的哲学家.他创立了笛卡尔哲学学派.他提出了一个使科学与哲学产生了分歧的,也是促成近代自然科学基本风格的所谓"笛卡尔分割".笛卡尔分割将客观世界割裂成"精神实体"与"物质实体"两半,影响了世界科学几百年.尽管在今天看来它是有缺陷的(毕竟只是一种技术,是一种人为划分,并非客观的原本),但我们也应该历史地承认他的功绩.笛卡尔的一句名言是,"我思故我在"(载于他的名著《冥思录》中),这是他的精神观的体现.

有人说历史上的科学家常常是集数、理、哲于一身的,这点在笛卡尔身上也体现的十分鲜明.

现在来归纳一下坐标系之于数学的基本意义.

概括起来,坐标系的意义主要在于:

(1)公认数学是“数”与“形”结合的科学，那么它是怎么结合的呢？坐标系正是这一结合的媒介.因为简单说来，“形”即空间，坐标系描述的正是空间(严格说是局部空间，或说平直空间)，而且是带有度量尺度的空间.这一来，把任何“形”放到坐标系中都成为可度量的，甚至说是量化了的.

看，“数”和“形”在这时结合的多妙！

(2)不仅如此，这一“数、形”结合的更为深刻之处还在于，它使数学变“活”了，它使得数的变化过程能在坐标系中展现出来.由此才有了函数和映射概念，也才有了连续数学、分析数学，进而一发不可收拾地发展成了光辉的现代数学.因此毫不夸张地说，坐标系的产生成了数学发展史上一大转折点.

(3)若再要问，数学之“数”为什么一定要跟空间的“形”结合？“函数”的概念和“分析”为什么必须依靠坐标系？这是个更为深刻的问题，也更有趣味.不过这里不拟作更多论述，只需指出，它的根本在于，统计表明80%以上的人是所谓“空间思维”型而不是“符号思维”型.因此“函数”一般是不容易直接创生于符号关系的.

事实上自有了函数概念及关于函数的分析学以来，几百年的实践和经验表明，尽管种种繁杂函数的表示、推演、运算都是符号的，但数学家脑子里呈现的却是一幕幕的图像，很少直接呈现符号过程的情景.之所以说愈难作出空间呈现的结论(比如多元高阶方程的解集结构)愈难获得，也是这个道理.

总之，坐标系使数与形形象地结合起来了，坐标系真正共鸣了人的思维，坐标系可谓数学中函数论这块毛铁赖以锤炼的

砧磴.

1.7.3 关于集合与空间概念

对于集合与空间这两个术语，大家已不生疏. 但为日后进一步的应用，这里再作一些强调.

公认，集合是数学中最为基本的概念. 而空间就是一种集合. 即使当其特别指明是××空间时，也不过是一种特殊集合而已. 比如前面提到过的线性空间即可说成是其中元素满足"加、减和数乘(以实数乘空间中元素)运算封闭"的集合.

人们之所以喜欢叫空间而不一律叫它集合，是因为空间一词十分形象，容易激发起人们的形象思维、空间思维本能，集合一词却没有这一"功能". 比如一说到空间，人们自然会联想到生活中习以为常的物理空间. 其实，数学中的空间概念早已不只是物理空间甚至不只是欧几里得空间了，特别是现代数学更多涉及的是诸如非欧空间(弯空间)、抽象空间等. 如信息空间、函数空间等都属于抽象空间，它们的元素远不是几何点，甚至是连物质特征都没有的抽象概念. 可是，人们还是喜欢叫它空间而不是一般的叫它集合，其机缘也许只能归结为人们空间思维特征地表现了.

总之，现代数学中用到空间一词的时候比较多，这里做统一说明想必是有益的.

最后，在进入到下面函数的类型结构和函数运算中的加、乘实质讨论之前，让我们再对函数概念作出进一步认识.

1.7.4　函数的概念认识

已知，函数也是一种数，不过它是一种变数（流行叫法是变量）. 它是由自变量、因变量及其对应规则构成的，一般形式为 $y=f(x)$，可取 $x\in D\subset$（包含于）$\mathbf{R}$，D 为 x 的变域. 这里 x 是自变量，它的变域为（具体说是它属于）实数集；y 是因变量，又叫 x 的函数，可记其值域为 I，也记 $I=f(D)$；f 是 x 和 y 的对应规则，又叫映射方式，也可径直表示为 $y=y(x)$.

函数，当其不强调自变域 D 演变到值域 I 的方式（函数式）而只强调其结果时，叫它做映射，记为 $f: D\to I$. 例如图 1-3，其中图像曲线 $f(x)$ 表示的是一种确定的映射方式，而只表出映射首-尾区域的情形则是很宽泛的，其间可以有很多种具体的映射方式. 所以映射的概念较函数的概念要宽的多.

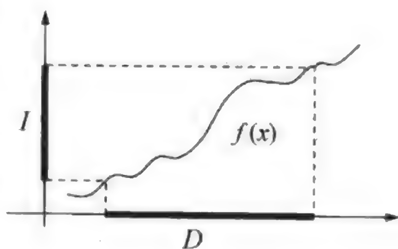


图 1-3

归结起来，关于函数可有如下认识值得强调.

（1）函数一般指具有函数式的映射，但函数与映射是近义的，通常可作等义用；

（2）函数式中一般可能含有多种文字、符号，它们不一定都是平等的变量，但也总是内在地含有自变量，其他的叫做参变量，否则不叫函数式；比如力学公式 $F=ma$，$W=\frac{1}{2}mV^2$ 等，第二

个表达式当其作计量测试时不是函数式，当其作变动关系讨论时即为函数式，从而相对地有其自变量、因变量；

(3)基本函数一般是实数集上经过映射升华成的(变)“数”. 进一步还将看到，随着数学的发展将有越来越多、越来越复杂的函数，它们是经过多层映射升华成的(变)“数”，但其中加、乘基本运算实质却不变.

1.8　函数：分类及各类的加、乘运算实质

从总体来说，可根据函数的形式和函数在加、乘运算上表现出的特征，将函数分为初等函数、特殊函数和抽象函数等三大类.

下面分别对三大类作出讨论.

1.8.1　初等函数及其加、乘实质

初等函数被定义为基本初等函数经过有限次加、乘四则运算而成的函数式.

所谓基本初等函数，包括算术的加、乘四则构成的函数式(也叫代数函数式)；幂函数式(包括乘方、开方，亦即指数为有理数、底数为实变量的函数)；指数函数式(指数为实变量者)；对数函数式(真数为实变量者)；三角函数式等. 简单说来即算术八则运算下对应的函数和三角函数一起叫做基本初等函数. 因此这里只需讨论一下三角函数的加、乘实质即可.

关于三角函数的加、乘实质，又只需注意到基本的三角函数

$\sin\theta$, $\cos\theta$，及 $\tan\theta$ 的几何定义式即明白了. 例如图 1-4 中即有 $\sin\theta=\dfrac{BC}{AC}$, $\cos\theta=\dfrac{AB}{AC}$, $\tan\theta=\dfrac{BC}{AB}$ 等.

特别地，反三角函数也一样有加、乘四则实质. 比如设 $\sin\theta=x$，则已知其反函数为 $\sin^{-1}x=\theta$，但这时 θ 的单位制只能取弧度制才行. 为什么? 因为只有取弧度制时才能与 x 具有同一坐标系下的(实为长度的)等价度量，也才能参与同一式中的运算. 那么根据弧度制的换算公式：

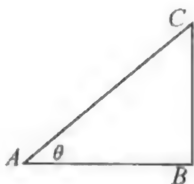


图 1-4

$$\theta^{\circ}(\text{度}) = \frac{\theta^{\circ}}{180^{\circ}}\pi = \vartheta(\text{弧度}) \qquad (1\text{-}8\text{-}1)$$

可见，问题还是归为四则运算了.

顺便指出，初等几何学中的运算，仍然是建立在加、乘四则运算上的. 这是因为它们的定义皆可用四则运算表出，但根本上说来，数学的一切成果最终都可以归结为由其定义推出，初等几何当然也不例外，所以如是说. 这时比如在平面几何学中，平行线是由其所谓“同位角”相等(差等于 0)来定义的；三角形间关系是由其对应边、角间的“比”和“等”关系来确定的；圆内弧、弦、角间关系可归为弧度运算和直角三角形内的运算来表出；至于直角三角形内的运算，包括“勾股式”和三角函数式(已谈到)，皆系四则式表出的. 因此由它们作出的演算免不了仍然具有四则实质.

至此，初等数学中几何学、三角学都讲到了，只剩下代数学了. 这点更是容易的(见下节).

特别指出，一般说来上述函数都可以作所谓“级数”(无穷阶多项式)展开，因此说上述函数在级数(强调性地叫做无穷级数)的意义下都是可以互相“沟通”的.

1.8.2 特殊函数及其加、乘运算实质

特殊函数又叫高等超越函数，这类函数的一个基本特点是，它们皆系建立在种种函数方程的解基础上的. 或说它们都是作为不同函数方程解的形式或解的理论而产生的.

一个函数，令其等于 0 或等于一个常数时，即成为一个方程.

已说过根据方程解的特征，方程可分为数值方程和函数方程两大类. 顾名思义，具有离散数值解的方程叫做数值方程，这类方程的主体是代数方程(1.4 节)；其解为函数的方程叫做函数方程.

一切方程的中心任务都一样，那就是围绕着一个“解”. 最直接的是求解，即求出解的表达式来. 若困难，则探索求解的方法，再有困难则转而做出解的理论探索，诸如做出解的存在性、唯一性探索，解的分析性质探索以及解的几何性质探索等. 已知，显式解是否理论性存在与是否能技术性地表(找)出来，不是一回事.

当然，作为特殊函数及其对应的函数方程所遇到的，自然都不是一些简单的函数. 具体的通常有所谓 Γ-函数，贝塞尔函数，切比雪夫函数，椭圆函数，超几何函数等，也包括广义函数. 它们的形式都不是在这里可以简单表述清楚的. 它们中除了已见到

过的极限形式、级数形式等深化层次外，还有积分形式和所谓高级超越函数等形式. 但不管怎样，它们都只是些加、乘四则或其深化形式.

总之，特殊函数的基本结构仍然是加、乘四则运算形成的. 即使说到的上述特殊形式，不过是增加了一些深化层次罢了. 限于本书的宗旨，这里不进一步述说了.

1.8.3　抽象函数及其加、乘运算实质

根据归类，这里抽象函数是在分析学意义下的一种类型，基本上包括上述除初等函数、特殊函数以外的所有函数，其共同特点可归为：① 它们一般都是来自一些新的抽象概念或其所建立起来的学科；② 它们中表现出的一般都是宏观映射，不具有统一的函数特征.

关于抽象函数，可示例性举出如下 4 类.

1. 算子映射

算子来自“Operater”一词，表示一种作用. 其实算子也是一种映射，只不过在算子理论中是把算子映射作为一个变元来对待，具体说是引进一个专门符号，在一个新的层次上来讨论对它的运算. 比如微分运算、积分运算皆可表示成一个独立(算子)符号的关系，然后只对符号来做运算，这样会得到很多方便.

例　对于高阶(具体取 2 阶)常微分方程

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c=0 \tag{1-8-2}$$

可记为

$$\left(a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1}+c\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}\right)y=0$$

于是可进一步表为“算子方程”：

$$p^2(D)y=0 \tag{1-8-3}$$

其中 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^1}{\mathrm{d}x^1}$ 叫做微分算子，因此 $p^2(D)$ 叫做微分算子 D 的二次多项式，即

$$aD^2+bD^1+cD^0=aD^2+bD+c$$

这一来求解常微分方程(1-8-2)的问题变成了解它的算子方程(1-8-3)的问题了，而后者是代数方程，一般比微分方程求解来得容易.

这就是解微分方程的算子理论和算子方法思想的发端. 不过也看到，虽然算子方程比原微分方程简单了一些，但它也是有代价的. 代价就是又提高了一个层次，因此更为抽象了.

由此说明，算子理论的确是个典型的在新的抽象层次上的(四则)运算形式.

同一思想下，还可有积分算子理论及其方法等，免于冗叙.

算子思想起源于泛函分析领域. 它是在所谓函数空间上进行的. 碍于它的抽象层次，目前较为成熟的只是所谓线性算子，即满足如下映射关系的算子：

$$T(ax+by)=T(ax)+T(by)=aT(x)+bT(y) \tag{1-8-4}$$

其中 $a,b\in\mathbf{R}$，即 a,b 为常系数；$x,y\in H$，H 是以一般对象(不一定是数)作为元素，但赋予了线性性的所谓线性空间(见 1.4.2 节，例 2).

式(1-8-4)容易验证，上面的微分算子、积分算子都是线性算子.

目前数学中的非线性算子理论虽然还在艰难地跋涉中，但作为一种思想特别是作为概念来用时是可以不拘于线性性制约的. 比如社会上任何一项政策的实施、任何一个信息的发布，对于它的对象空间——接受群体来说，即是一个个算子，至于它是否线性或是否可线性化，仅当需要时才值得进一步去考察、去“赋予”它.

总之，把算子上升为一种思想去观察世界，也是一种数学思维，久之即会使我们产生一种清新感，不是吗？试试看.

2. 泛函映射及其加、乘运算

泛函又叫泛函数，其特点之一即它是标量性的(变)数.

泛函概念来自“泛函分析学”. 简单说当算子映射成的(像)值不是向量，不是空间，而是标量时，此即泛函. 但是这样去接受它未免太乏味了，也不利于启发我们的思维.

我们主张不必拘泥于泛函的算子认识途径，而是把它上升为一种思想用到实践中去. 这时我们完全可以看到，泛函的确是名实相当的. 无异乎说泛函就是泛义、广义的映射. 比如，设泛函映射为 F，它把对象空间 Y 映到 $\mathbf{R}$ 上(映成实数)，记为 $F: Y\to\mathbf{R}$ 这一泛函映射的“泛”就在于：

(1)对于 F 只强调其映射性，亦即可以没有函数表达式. 比如一场文艺表演赛中评委给打分，就可以看做是一种泛函映射. 一般说给分者是拿不出一个给分“函数式”来的.

(2)对映射对象 Y 的要求也是宽泛的，只把 Y 看做是一个空

间——元素构成的集合，因此它可以不是由数构成的. 比如每一个文艺表演节目就是一个对象空间 Y，评委凭借他的感知能力对 Y 发出的全部信息(信息空间)作"算子"运算，即产生出一个(泛函)映射值. 至于这一映射是否线性、空间 Y 是否线性，当理论需要时可进一步对 Y 和 F(对照线性空间知识)作理解、认识，然后决定是否能"赋予"它以线性(又叫线性化). 不过像刚才这样在生活中的运用则用不着多此一举(线性化)了.

(3)作为泛函映射，不能"泛"的只是其映成的"像"必须是量. 亦即可以为变量，但必须是标量. 或者说是必须映到实轴(在坐标系意义下，实数集与实轴等价)，而不是映成别的(高维)空间.

以上仅介绍了泛函映射的概念，指出了它的特征，想必是会有用的. 但为了切题，还必须谈到它的运算，这可就简单了. 为此需要回到数学的泛函分析中去.

已谈及，数学的泛函分析中，目前较为成熟的只有线性泛函. 非线性泛函尚处幼小阶段. 既然是线性泛函，所作的是线性运算，自然属加、乘四则的了. 即使能用公式表出的泛函表达式，如短程线问题、最速降线问题等所用到的不过仍然是一些初等函数和微积分形式罢了.

还可谈到的是张量分析，又叫多重线性泛函. 这一名称也基本上显示出了这种函数的结构特征. 它是线性泛函的一种很有意义的推广领域和学科分支. 它在诸如典型的现代分析学、宇宙空间理论、相对论等领域，都处在基础理论的地位. 但它的结构和运算仍然只是一些加、乘运算和微积分运算，仅仅是承载其运

算的台阶高一点而已(兹免冗述).

3. 拓扑映射及其加、乘运算

关于拓扑学的概念特别是一般拓扑学在(1.2节)中已经谈过了.这里着重就它们的加、乘运算实质作一重点考察.

首先,根据拓扑空间定义可知,所有拓扑空间的结构中皆具有并(加)、交(乘)运算.其次,根据拓扑映射的连续性,作为映射函数它只能是既有函数中的一个子类,再根据本节知识,即可显见拓扑学(具体说是一般拓扑学)的加、乘实质了.

至于代数拓扑,顾名思义,自然是以代数运算(加、乘四则)为特征的.包括它的前身组合拓扑都是这样的.只是承载运算的"舞台"已不再是直接的实数集,而是所谓单形、复形、链群、同调群之类抽象对象罢了(这里免述).

实际上产生代数拓扑(实为其前身组合拓扑)的问题并不抽象.它来自19世纪欧拉(L·Euler, 瑞士,1707—1783)的图形三角剖分和凸多面体的棱数(e)、面数(f)、顶点数(n)间关系式(欧拉公式:$n+f=e+2$)的发现以及(还是欧拉的)哥尼斯堡七桥问题等成果的启发.进一步的是受后来庞加莱(H·Poincaré,法,1854—1912)的图形"单纯形(n维空间中$n+1$个独立点连成的多面体)"剖分论的激发.

关于微分拓扑.微分拓扑的"舞台"则是流形(见下),或说微分拓扑是关于流形上微积分映射的理论.它是一般拓扑的连续映射向可微性方向的推广.

所谓流形即弯空间.其存在背景即宇宙空间和高速运动下的空间特征等所谓大范围问题.流形是现代数学比如现代几何、

现代分析和动力系统等的“舞台”，也是现代物理学、现代天文学、天体物理学的典型“舞台”.

首先说，微积分的加、乘四则性已于算术十则中得到讨论.至于流形上的微积分，不过化为所谓活动标架(即平直空间坐标系)下坐标变换之类的“四则”刻画而已. 其中一个关键词则是“纤维丛”，“丛”中一条条“纤维”就是一个个线性空间，而线性空间只是由加、减和数乘四则运算界定的，由此可知微分拓扑学的加、乘实质也是当然的了.

事实上由 1.4 节知，既然代数(四则运算)是整个数学的基本结构之一，自然也是拓扑学中的基本运算了.

4. 符号函数及其运算特征

符号函数是人为设置的以一些特有符号表示的映射，比如有 δ 函数，阶梯函数(记为$[\cdot]$)，绝对值函数($|\cdot|$)以及数论函数等. 实际上每一函数都是一个类型. 现分别举出它们的一个定义式：

$$\delta(x)=\begin{cases}1, x>a\\0, x\leqslant a\end{cases}$$

$$[x]=n, n\leqslant x<n+1, n=0,1,2,\cdots$$

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, x>0\\-x, x<0\end{cases}$$

符号函数有如下特征：

(1) 它们一般都是分段函数，因此是不光滑(不可微)的，甚至是不连续的.

(2) 它们不是为了更精确描述客观对象而构造的，只是为了

人为地凸出客观事物的某种特征如突变性、间断性、阶梯性等而构造的. 因而说符号函数也是一种(只凸出事物特征的)“特征函数”.

(3) 基于上述特征,一般不对符号函数实行运算,所以不存在其加、乘运算讨论问题.

(4) 正出于符号函数的分段性,一般函数构造中如果用上符号函数,将会使函数回避掉分段形式.

(5) 符号函数不是初等函数,也不是超越函数,根据上述特征,它应该是一类特有类型.

1.9 客观世界中加、乘实质

莱布尼兹(德,1646—1716)曾经把《易经》誉为宇宙代数学. 那么是否还有诸如宇宙分析学之类呢? 本章将表明有了代数运算这点已经够了. 代数运算关系已经是宇宙的最为基本而全面的演化规律了. 可见《易经》之伟大.

因为数学描述的是客观世界,反映的是客观规律. 那么,既然数学是由加、乘构成的,这就不难相信客观世界也具有“加、乘”的实质了.

特别地,本节还可从另一角度直接得出客观世界的加、乘实质,以达殊途同归效果.

具体说,我们将从客观世界普遍存在的“关系”出发,通过对关系的剖析去逐步推出其加、乘实质来.

1.9.1 关系概念剖析

从哲学角度来说，客观世界任意两个对象间都少不了这样或那样的关系，无穷无尽，诸如社会关系、家庭关系，物质关系、情感关系，私人关系、公共关系等，不胜枚举. 不过稍作抽象、提升即可以获得简化. 比如从系统学角度可将其提升成为一个一般的“关系”，概念如下：

一个关系是客观世界两个对象或两个事物，在某种意义或某个目标下，发生的一种相互作用.

具体说来，彼此之间“相互作用”，其动因来自共同的“目标”. 其作用可以是实在的，也可以是抽象的. 比如从力学角度来说，作用“力”（向量）间可有各种状态（夹角），因而可以有相反的、可以有相成的、可以有既相反又相成的，等等. 当然也可以有相互平行的，也就是相互独立的情形.

再说（社会）生活中常把关系分作相关和无关两类. 对于“相关”之中关系的强弱描述，只有定性的说法，十分“模糊”，亟待量化. 对于“无关”系指：两者不在同一目标下即为无关. 这点与数学中的“无关”概念是完全不同的，需要特别作如下注意.

在数学中，关系似与生活中的一样，也分作相关和无关两类，但已说过二者在概念上差异是很大的. 即使在数学中它也可能因学科分支的不同而有所不同. 比如在代数学中线性空间意义下则有其线性相关、线性无关（线性独立）概念. 它是以“是否能用一组不全为 0 的系数把该组向量组合为 0”来界定该组向量相关还是无关的. 又如，在函数论中则有用

函数式表出的线性函数关系和非线性函数关系(简称线性关系、非线性关系)之分，甚至算子意义下的线性关系与非线性关系之分. 它与代数学中线性与非线性的描述十分不同，尽管本质上也有其共通性.

特别注意到，代数学中的关系系指元素间直接的一种关系，而函数论中的关系则是通过"目标"而产生的关系. 当然，不管在代数学中还是函数论中，所说的关系都是在同一坐标系(空间)内来说的. 这也等价于系统学的"在同一目标下"的说法. 但这些都与生活中的说法(概念)"无非空交"是完全不同的.

总之，在这里我们应分辨开(生活中的)相关与无关、(代数学的)线性相关与线性无关、(函数的包括算子的)线性关系与非线性关系等概念的差异性.

本节所要讨论的是函数的线性关系和非线性关系，现分段述出.

1.9.2　线性关系

仍以基本的两个对象来讨论. 这时函数的因变量(记为 y)就是系统的目标，自变量(设为 x_1, x_2)就是两个讨论对象. 这时所谓线性关系即 x_1, x_2 相互独立、无直接关系，表现为它们的"力"是彼此平行的，因此它们对 y 的作用是彼此独立的. 亦即其中任意一个为 0 时，另一个的作用及其效果都不变. 表现在函数式上即为

$$y = c + ax_1 + bx_2 \tag{1-9-1}$$

其中 $a, b, c \in \mathbf{R}$ 可正可负，a, b 分别表 x_1, x_2 对目标 y 的贡献率

(为正)或削弱率(为负),c 是 y 的存量.

显然,关于多个元素间的线性关系,不难直接推广得到. 比如一个 n 元线性关系即如下式,不再解释:$y=c+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.

特别应看到,线性关系就是一种加、减关系.

1.9.3 非线性关系

客观世界表现出的,常常以非线性关系为主,线性关系常常只是其中经简化或作局部考虑的结果. 进一步观察、研究得知,非线性关系可分竞争与合作两类,其极端情形则为对立与统一.

由于非线性是相对于线性来说的,而线性就是一种"独立",所以非线性关系是"非独立"的,因而任意二元素间非线性关系,不管是竞争还是合作,皆应表现为乘积关系. 因为只有在乘积关系中才能表现出非独立性:缺失其中任意一个,另一个都将发挥不了作用.

至于竞争与合作的具体差异,可分别来谈.

1. 竞争关系

首先考虑为什么会产生竞争? 我们说那是资源的稀缺或短缺造成的. 具体说竞争是资源稀缺或短缺之下的一种自然地配置方式. 因为即使稀缺或短缺,还可实行人为的"合理"分配而避免竞争. 实际上竞争在各类生物群落中都有充分表现,当然也会自然地进化到人身上来.

那么,在数学上这一稀缺或短缺和竞争怎么表示呢? 那就是

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = k \tag{1-9-2}$$

其中 k 表示有限的资源总量，α、β 叫竞争系数，满足归一化条件：$\alpha+\beta=1$，它们分别表示 x_1、x_2的竞争能力.

再结合到这时的非线性关系式的特征，可用函数式表示为：

$$y = d\, x_1^{r_1}\, x_2^{r_2} \tag{1-9-3}$$

其中 d 表示 x_1、x_2共同对目标 y 的贡献率，r_1、r_2 分别表示 x_1、x_2 在贡献中的投入系数，数学上也叫对数权，经济学上叫做弹性系数，满足 $r_1+r_2=1$. 再在式(1-9-2)中解出 x_2 并代入(1-9-3)，整理后可得到

$$y = d_0\, x_1^{r_1}(k_0 - x_1)^{r_2},\, d_0 = d\alpha^{r_2},\, k_0 = k/\beta \tag{1-9-4}$$

则结合(1-9-2)、(1-9-4)两式即得竞争意义下的函数表达式了.

2. 合作关系

一般说，在合作关系中只有各自奉献大小的比例性限制，没有式(1-9-2)的约束. 因而合作关系就只有式(1-9-3)形式. 它最显著特征是一个也不能缺，否则大家的贡献就都为 0 了. 当然，当两者皆参与时，为使合作效果好，还得需要二者的合作能力强(即 a 大)；需要 x_1、x_2 分别的投入量合理，即需要 $r_1 : r_2$ 趋于最优.

特别地，当其推广到 n 元(x_1, x_2,…, x_n)间合作关系时，一般的表达式较繁，这里只作一简单(免去投入系数)的表示，那就是

$$y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n_i} a_k\, x_{i_1} \cdots x_{i_i} \tag{1-9-5}$$

其中 $n_i = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$，即 n 个元素(x_1,x_2,…, x_n)中取 i 个元素的组合

数，其组合为 $x_{i_1}\cdots x_{i_i}$.

当然，n 个元素间的竞争关系也可以一般的表出来，只是更繁一些罢了，这里免叙.

1.9.4 一般情形讨论

1. 一般情形

仍以 x_1，x_2 两个元素来讨论. 显然，在一般情形下它们既存在独立贡献，同时又有竞争和合作. 因此这时的函数式右端原则上就是式(1-9-1)、(1-9-3)右端的加总，再以式(1-9-2)作为条件来表征. 此即

$$y = c + ax_1 + bx_2 + dx_1^{r_1} x_2^{r_2}，满足\ \alpha x_1 + \beta x_2 = k.$$

至于任意 n 元情形的表示就免了.

最后，结合到本章宗旨立即得知，元素间的基本关系的确就是加、乘关系，仅此而已.

2. “1+1”与 2 的关系讨论

系统学中有句名言“1+1>2”. 当然这里“1+1”和 2 都不是数学的了，而是系统学特别赋予的含义. 比如任意系统中两个人(元素)在一定意义(目标)下结合起来的效果. 由于两条心之间可能出现上述多种状态，这时式(1-9-1)～(1-9-4)诸情形都可能发生，其中所有参数都可能取到，特别还有可取负值的参数. 因此说不只是两个和尚抬水吃的问题，也可能两个和尚挑水吃、没水吃、争水吃等都可能发生. 因此说有“1+1>(=或<)2”多种情形. 这些都应该是本节讨论的自然结论，兹免冗述.

1.9.5　加、乘让客观世界从简单到复杂

已经看到，客观世界是各种层次的关系编织起来的.而所有关系最终归结为两两对象间的基本关系，但基本关系在本章最终被归结为加、乘关系，且任意二对象间关系都是这些加、乘关系垒叠而成的.由此可见，整个客观世界都是以加、乘关系为根本生成子、基本块，经层层复合、叠加、递加而成的.

换句话说，最为复杂的客观世界系由最为简单的加、乘运算繁衍而来，因此说这也是章首提到的圣菲研究所(SFI)提出的"从简单到复杂"的一个典型实例.

从简单到复杂，又叫做从分子到物质、从细胞到肌体、从小屋到城市(cell to city)，这一理论从系统科学角度揭示出，客观世界一切复杂事物都是从其特定的简单事实演变而来的.

应该说在今天的科学知识水平下，这已是个很容易被接受的事实了.

比如，咱们今天宇宙天体的形成不就是一百四十多亿年前，一次暴胀生成的雾状体中"基本粒子"，凭借自己禀有的(+、-)场性质，形成彼此间对偶关系(亦即康德的"二律背反"或叫"对立统一"关系)，从而产生越来越多的、一层一层的、不完全对称的结合(此即"加"、"乘")，终于形成万紫千红的缤纷世界.

从这一意义看来，本章的叙述实质上就是从数学思维出发，将"对立统一"这一基本定律的考察转换为对加、乘关系的考察，最后殊途同归，得出了客观世界的同一个结构描述而已.

1.10 一个应用实例:经济社会中的“除法”

曾经有过一种说法,“社会科学中没有数学,经济学中也只有初等数学.”这一结论的谬误性在今天看来已不攻自破.比如社会学中的社会统计学也已向着数理统计学深化了,在文献《数学及其认识》(施普林格出版社-高等教育出版社,2001年)中谈到“正如19世纪与20世纪数学在生物学中的差别一样,数学在社会科学中也终将会有这样一个‘翻覆’的一天.”

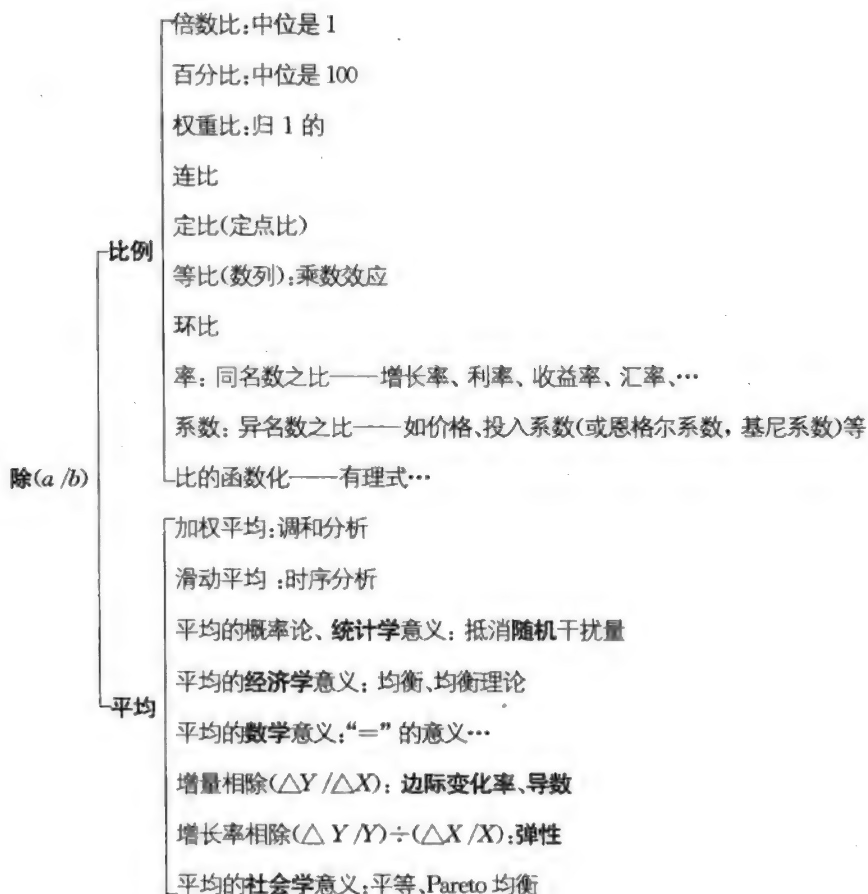
下面着重就经济学来讨论.

根据本章精神,既然加、乘充满世界,经济学中自然也少不了初等数学,只是它不仅仅是初等数学,而是更要从初等数学生发出越来越高深的数学罢了.

本节将表明,即使一个平凡的除法在经济学中也并不平凡,它不仅在经济学中被发展、推广得淋漓尽致,还往纵深发展,导致十分深刻的系列数学的创生,以致不仅是数学支持了经济学,经济实践也为数学直接作出过贡献,推动过数学的前进.我们将看到,数学中的概率统计学、博弈论、集值映射等都是直接发端于经济学或经济生活的.

1.10.1 一个宏观结构图

除法(a/b),在经济学和经济生活中可以从“比例”和“平均”这样两个观点去看待,从而分别生发出了系列新概念和新内容,其基本结构关系可用如下宏观略图来表示:



下面分别作出欣赏.

注:为便于叙述,除特别声明外,以下所取的代表数量的符号皆表正数. 对于负数容易推广认识,这是因为对于负数($-a$)只需将"负号"($-$)看做系数-1参与运算即可.

1.10.2　比例意义下的"除"

比例:从整体意义出发考察除式(a/b)的分子(a)对分母(b)的倍数关系时,叫做(a、b 之间)比例关系,记为 $a/b=r$.

在比例关系上又生发出很多种具体的概念，这里可举出八种来.

(1)**倍数比.** 由于比例是一种比较，而比较有两种：凭差值比较差数大小和凭商值比较倍数大小. 比例则属后一种，所以直接地叫它做倍数比.

倍数比的“中位数”是 1，即 $r=1$ 这是两者相等、等倍的情形.

换句话说，不管参与比较的两数有多大或多小，一般说通过这一“比”，即使得它们变成(也叫映射成)了围绕 1 的一个数，这时仅表征它们间一种关系.

(2)**百分比.** 在经济中的倍数比通常的比值是所谓“小数”，比如经济的年增长率、存款利率乃至社会犯罪率、环境污染率等等，常常都是在小数点两位内，诸如我国经济平均年增长率为 0.09，读起来既不方便又容易使人的思想变得狭窄，很不舒服. 于是前人创造出一种新的表述法：将 0.09×100 变成了醒目的整数 9，可是这一来让原数白白增大为它的一百倍，显然不合理. 但要再除以 100 又回到了原数，怎么办呢？于是前人又创造性地用了一个符号——“%”来表示它. 这一来既回避了除以 100 的烦恼又保证了原来的 0.09 值不变，成为 9% 其创造性实在是妙.

过去说数学家是玩符号游戏的，看来经济工作者们也玩起符号游戏来了. 其实这是功到自然成的，是思想、认识到位之后的自然表现，可见实践出真知、实践出创造.

正是因为实践出真知、出创造，在这一“百分比”思想下马上

又推广出了多种便利、适用的形式. 那就是**千分比**和**十分比**. 千分比记为“‰”,这也是人们已经熟悉了的,比如说我国人口增长率是千分之六即记为 6‰. 十分比就是通常说的“分成”,比如说某两人合伙做生意对半分成(5∶5),人一生缺点优点之比为三七开(3∶7)就算是好人了,等等.

(3)**权重比**. 对于 $a/b=r$,上面是把注意力放在右端来看的,现在把注意力放到左端来又可开发出新内容了. 比如把分子、分母作平等看待即是一种.

对此,前人又创造出一个新的记号 $a/b=a:b$,这时来观察右端即突出了二者“比”的关系了. 特别地,由此还可推广到多个数的所谓“连比”情形(见后).

由于是考察其“比(r)” ,因此只要保持 r 的意义不变,其他的都是自由的了. 比如人们想到用 $a+b$ 去通除 a 和 b ,即可变为

$$\frac{a}{a+b}:\frac{b}{a+b}=\alpha:\beta \qquad (1\text{-}10\text{-}1)$$

这时有 $\alpha+\beta=1$,α、β 称为是归一化的. 这时的比式(1-10-1)叫做权重比;叫这一演化过程做权重变换. 顾名思义,权重(Weight)表示各量在相应比较关系中所占的份额.

显然,权重变换使得原本可以任意的数 a、b 都被映射到[0,1]区间上去作考察了.

进一步可见,权重变换还可运用于多个数的“连比”情形.

(4)**连比**. 已谈及,连比即式(1-10-1)的推广,即多个数字依一定顺序作出的比例关系,形如

$$a_1 : a_2 : \cdots : a_n \tag{1-10-2}$$

显然，其中$\{a_i\}$若有公因子则可以约掉，特别还有如下变换.

① 归一化比. 如果式(1-10-2)中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$，则用其通除各项(即作归一化变换)可使之成为(归一化的)权重比. 比如在经济社会中用到连比时，常常就是归一化的. 例如说某企业总资产各成分配比＝固定资产：活动资金：负债：债权＝0.45：0.15：0.25：0.15.

② 环比. 在经济活动中也需要连续将后一期的某一指标量与前一期的作出“比”，这样依次下去既可展示出每相邻两期量间比较，还可观察到各年间宏观总体特征. 由此还可作出深入的理论探讨.

以下是在连比意义下的几何推广.

(5)**几何比**. 这是一类从坐标系上考察数列$\{a_i\}$的情形. 诸如等差数列、调和数列、等比数列和定比分点理论等，皆属于这一可从函数图像上去作研究的数列. 前两种叫做算术数列问题，后两种叫做几何数列问题. 这里着重谈谈后两种情形在经济学中的应用.

①等比数列：又叫几何数列，它是连比的又一推广.

在连比式中当相临项间比值不变时，即成为几何数列. 其数列求和即为等比级数，或叫几何级数. 它在经济学中的应用较广，下面仅举几例来谈.

例 1 现代储蓄业一般用所谓复利法计算利息. 设有定期存款本金 R，年利率为 r，总利息为 I，存款年限为 n，记总存额为

Zn，则不难算得有数列

$$Z_i = R(1+r)^i$$

$$I_i = Z_i - R = R\{(1+r)^i - 1\}, i = 1, 2, \cdots, n$$

同样用此等比数列还可表出(算得)零存整取下的计量公式等，兹免细述.

例 2　“乘数效应”是经济学特别是宏观经济学中一个重要理论，它深刻揭示了诸如投资、消费、储蓄等货币市场的运行机制和经济规律. 它的数学模型正好是一个等比级数. 例如假设有一项投资 R 投出后，再假设人们收入了 R 后以 αR 作为储蓄，以 $(1-\alpha)R$ 用于消费支出，这是第一轮. 为醒目，假设第二轮仍然是人们收入了 $(1-\alpha)R$ 后又以其 α 倍，即 $\alpha(1-\alpha)R$ 作为储蓄，余下的 $1-\alpha$ 倍，即 $(1-\alpha)^2R$ 作为消费支出. 如此下去，直至货币完全“用尽”. 这在数学上可处理成经过了无穷轮(货币“用尽”后的所有项为 0，不受影响).

现在问，由 R 产生的全社会得到的总收入(Y)是多少? 由 R 产生的全社会银行储蓄额(S)是多少? 原来这都是等比数列的求和，因此容易算出

$$Y = R[1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \cdots] = R \cdot 1/\alpha$$

$$S = R\alpha[1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \cdots] = R$$

这就是货币市场的“乘数效应”，也就是它的经济效应，十分可观.

② 定比. 又叫定点比，诸如求调和比中项、求定比分点等即属此类. 这里仅举一个求定比分点与经济活动的关系. 那就是“黄金分割”问题，也就是“0.618”问题.

首先说，黄金分割问题是一个求定比分点的问题.

设有全长为 a 的线段，需要于其上寻找一点其长为 xa，使得该点成为该线段的定比分点，即有 $a:xa=xa:(a-xa)$ 亦即(通除以 a)有 $1:x=x:(1-x)$，从而有 $x^2=1-x$，解得 $x=0.618\cdots$ 此即，所求点约在全长的 0.618 倍处.

要说的是，“黄金分割”不仅有其悠久辉煌的历史，而且在今天的经济社会中也充当着重要角色.

历史上，早在公元前的古希腊时期已对它有了丰富的认识. 比如古希腊女神，标准美女维纳斯即是按黄金分割比塑造的；古典门窗、地砖的长宽比都是按黄金分割的. 这里特别指出，毕达哥拉斯曾用五条等长的边交织成的“五角星”作为他的会徽，也是对黄金分割的崇拜表现. 这是因为五角星中各个节点都是相交于此的所有线段的黄金分割点.

几千年来，科学关于黄金分割的兴趣和发现一直在迭进着. 关于黄金分割的知识也越来越多，直到 20 世纪上半叶还出现过以“黄金分割”命名的杂志呢.

20 世纪 60、70 年代，享誉世界的数学家华罗庚教授在全国推广的优选法即属这一应用，因此优选法又叫做“0.618 法”. 即使在当时只抓“革命”不促生产(尽管口号还是“抓革命，促产生”)的形势下也为我国面临崩溃的经济作出了不小贡献. 如今“0.618 法”在优化理论和方法中仍继续起着重要作用，在我国还有关于优选法统筹法与经济数学的国家一级学会呐.

(6)**率**. 对于两个数之比，当注意到他们的量纲时，又将生发出一些新的概念，“率”即是其中的一种. 率——两个同名数之比

产生的不名数叫做“率”(至于两个异名数之比产生的是带量纲的数，见本节(7)中“度”)，也是个“百分比”.

在经济学中有关“率”的概念特别多，诸如：

增长率——分作平均增长率($\Delta Y/Y$)与边际增长率($\Delta Y/\Delta X$)两种，其中$Y=Y(X)$.

利率——货币的价格.在金融经济中随着金融领域、金融市场的不同，可有若干不同的利率概念，比如有央行颁布的利率、投资者的收益率、市场的风险利率、国际货币市场的汇率等.此外，在社会生活中也有很多“率”概念，诸如犯罪率、破案率、收视率、失业率、问卷调查回收率、支持率等.

注：凡是表征社会现象的量，一般都用率、百分比，而很少用“绝对数(带单位制的数)”.这是因为“任何好的社会都有很多坏事；任何差的社会都有很多好事.”因此要用举例这样的“枚举”方式来证明一个社会的好、坏是无意义的，只有用百分比、率来说话才是有力的.

(7)**系数和度**.当两数之比——除式的除数和被除数带有不同单位制时，叫做异名数相除，这时的“单位制”不可能被“约”掉，而是作为一种“复合单位制”——量纲而存在.实践中把这种带有量纲的商数叫做系数或叫做度(算术上叫它做复名数).

如社会生活中的速度、程度、浓度、知名度等即是“度”.“系数”在实际中应用也十分宽泛.比如在经济生活中，价格即是一种系数；在投入-产出分析中投入系数阵的所有元素皆为系数；在统计学中也有“关联系数”；在层次分析法中还有所谓“判断”矩阵系数，等等.

系数概念来自函数式中自变量的乘数，又叫参数、参变量等. 比如

$$f(x) = ax + bx^2 + e^{\alpha x} \tag{1-10-3}$$

其中 a、b、α 都是系数. 在实际应用的数学模型中，系数不仅起着数量调节的作用，还肩负着量纲调节的作用，从而完成具体量(带量纲的量)的映射作用. 比如商品 x(也可以 x 代表其具体数量)，其价格为 p，记其总价值为 v，则有 $v=px$，可见系数 p 这时起的作用是能将物品 x 转换成货币 v.

(8)**函数比**. 以上考察的是被比式(分子 a)和比式(分母 b)皆常数的情形. 可要知道这里的常数常常只是具体的、暂时的、特殊的表示，或说只是运算的最终结果. 因此说即使比式中是两数之比，我们也应该看到它仅仅是一般函数比式的特殊情形.

换句话说，所谓 $a : b$ 原本是两个函数 $a=a(x)=a(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，与 $b=b(x)=b(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 之比 $a(x)/b(x)$，甚至可能他俩的自变量也不一定相同. 所以，真正的通有意义下的比式应该是分式，或者说有理式和函数比才是具有通有意义的，才是它的数学涵义.

1.10.3 平均意义下的“除”

平均——在分式 a/b 中，当考察单个分母所对应的分子量时叫做平均，也就是“除”的原意. 不过，既然叫它平均而不叫做除是有它特殊含义的，那就是：① 作为“平均”，其分子 a 可以是且常常是多个同量纲的数值(统计学中叫它做样本值，记为

$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$)之和,即有 $a=\sum_{i=1}^{n} x_i$;② 在这里,分母 b 即是已被确定了的,那就是样本个数 n. 所以这时的平均值(记为 $\bar{x}$)则为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1-10-4}$$

在平均意义下,经济学中又生发出了越来越多的新概念. 归结起来它说明了:平均、平等以及等的概念遍布于整个客观世界;在哪里它都是被追求的标准或最优状态,是定量分析、理论研究的核心和参照. 这里仅举八条供飨.

(1)加权平均.

在 $\bar{x}$ 的表达式中可以合并同类项,并作简单的恒等变形即有

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\frac{\sum_{j=1}^{k \leqslant n} n_j x_j}{n}=\sum_{j=1}^{k} \frac{n_j}{n} x_j=\sum_{j=1}^{k} \theta_j x_j, \sum_{j=1}^{k} \theta_j=1 \tag{1-10-5}$$

这时叫 $\bar{x}$ 做 k 个相异样本数的加权平均. 其中权向量 $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$是归一化的. 特别当 $k=n$ 时,即成为权系数皆相等且等于 $1/n$ 的情形.

可见一个十分平凡的求平均问题,竟被引申成为一个更为深刻的加权平均问题.

这里"权"作为一种归一化的系数,又成了一个新的理论生长点. 比如在理论上发展出了"调和理论"这一纯数学分支,它还是科学技术上当今十分走红的"小波分析"的理论基础;在应用

上不仅有了算术权、几何权概念,更有所谓“赋权原理”和越来越多的赋权方法(见《社会度量学原理》. 西南交通大学出版社,2000 年,202-224).

(2)滑动平均.

对于数轴上两点 x_1,x_2,有

$$X=\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta\in[0,1] \qquad (1\text{-}10\text{-}6)$$

其中 x 叫做 x_1,x_2 间以 θ 为滑动参数的滑动平均. 这里指出三点:

① 滑动平均就是加权平均思想的一种引申. 如在式(1-10-5)中当 $k=2$ 时即成为 $\theta_1+\theta_2=1$,从而有 $\theta_1=1-\theta_2$. 这时式(1-10-5)即成为式(1-10-6)的情形了.

②高等数学中,在表现凸函数、凹函数时有过这样的表述. 设有 $y=f_1(x)$ 和 $y=f_2(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset\mathbf{R}$ 上,取 $X=\theta x_1+(1-\theta)x_2$,$\theta\in[0,1]$ 则若 $f_1(x)>\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2)$,称 $f_1(x)$是凹(向上凸)函数;若 $f_2(x)<\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2)$,则叫$f_2(x)$ 是凸(向下凹)函数. 这里即充分用到了自变量和函数的滑动平均表达式. 如图 2-5.

③ 滑动平均的推广. 式(1-10-6)只是一阶的滑动平均,原则上可以推广到任意有限(k)阶的情形,即这时有 k 个滑动参数. 形如

$$x=\theta_1x_1+\theta_2x_2+\cdots+\theta_kx_k+(1-\sum_{j=1}^{k}\theta_j)x_{k+1} \qquad (1\text{-}10\text{-}7)$$

滑动平均概念在应用数学中还是有一席之地的,比如它在“时间序列分析”这一运用很广的学科中,可用作自回归模拟模型中的

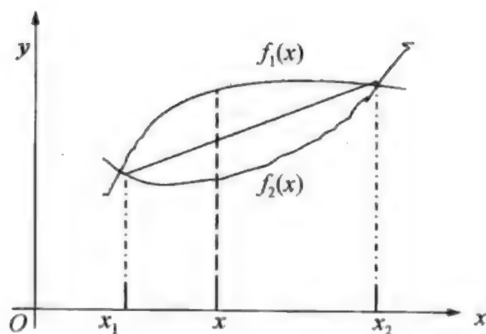


图 2 - 5

误差调节式，见式(1-10-8)(k 阶自回归 m 阶滑动平均模型)中的右端.

$$x_t+\sum_{i=1}^{k}\varphi_i x_{t-i}=a_t-\sum_{j=1}^{m}\theta_j a_{t-j} \qquad (1\text{-}10\text{-}8)$$

(3)平均的概率及统计学意义：消除随机干扰.

在式(1-10-4)中，稍作变形即有

$$n\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i \text{ 或} \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i=0(\text{实则}\approx 0) \qquad (1\text{-}10\text{-}9)$$

可见样本中，$\forall x_i\in\{x_i\}_1^n$，虽不是“均值”$\bar{x}$，但也是围绕着它的只有微小浮动的一个量. 比如在实践中特别是在要求精细的科研实践中，常常对同一个对象用不同的仪器去重复度量 n 次(或同一仪器由不同的人去重复度量，抑或同一仪器不同的时间作出的重复度量都将如此)，所得到的 n 个样本都是不同的，但也只是离其均值不远的小差异. 不过这些差值是没有规律的，叫它们做随机干扰量.

因此说式(1-10-4)中的求均值具有一个概率或统计学意义，那就是能抵消随机干扰，特别在式中当 n 取∞时，随机干扰

将绝对能被抵消尽.

其实整个统计学理论不过就是围绕着样本组的均值展开的. 可见一个平凡的求均值问题并不平凡.

即使求概率的概率式 $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{n(N)}{N}$ ($n(N)$表示 N 次实验中事件发生的频率)也是个通过“平均”来求得“一次实验中事件发生的可能性大小”的.

(4)平均的经济学意义:均衡.

我们注意到,从经济生活中的核算到经济学中的各种理论,“均衡”都是其中一个十分核心的概念. 比如在微观经济学中的局部均衡(类)、一般均衡、种种定价理论,宏观经济学中的投资-储蓄均衡、货币市场均衡、总供给-总需求均衡、国贸均衡等,不仅本身是在研究均衡,相应理论也都是围绕着均衡概念来建立的. 以至于可以说整个经济学都是围绕着“均衡”这一概念来建立的,既以均衡为目标,也以均衡为参照. 经济管理也是这样的.

这是因为现实的均衡就是其效能的优化状态(表现为现实系统上的效能函数的导数为 0)之故. 尽管说经济的客观存在是非均衡的.

事实上 20 世纪 70—80 年代也曾经兴起过一门“非均衡经济学”. 它貌似更合实际,但很快即跌落下去了,为什么呢? 原因之一就是均衡——均衡点、均衡状态是经济系统“状态空间”的非平凡点,对它们的研究才具有典型性,才是抓住了“牛耳”的;原因之二是对“均衡”这样的“非平凡点”的研究具有更好的数学特征,因而才有更好的数学工具供使用.

总之，均衡在经济中被重视，不是个技术性的问题，而是有其内在机制的.

(5)平均的数学意义："＝".

皆知，数学中离不开"＝"，从显函数式到各种方程乃至不等式理论，都是如此. 以致可说离开了"＝"就没有了数学，无怪世世代代都有人歌颂"＝"、赞美"＝". 这说明"＝"的使用在数学中不是一种技术、手段，而是有其内在机制的. 的确如此，主要的可表现为如下几个方面：

① 从条件限制来讲，"＝"在数学中意味着约束. 比如对于显函数 $y=f(x_1,x_2)$，这是 3 维空间中的一个 2 维曲面，若限制 $y=c$（常数）则立刻变成一条一维曲线了.

② 从几何上讲，"＝"意味着一种降维作用（降低空间维数）.

比如 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $z=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是两个 n 维超曲面，一旦将其联立（即令其相等）立即成为至多为 $n-1$ 维的超曲面了.

又如，$f(x_1,x_2,\cdots,x_m)>c$ 和 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m)<c$ 都是保持在 m 维曲面上进行的，可是当函数从"＞"变到"＜"时，必定经过"＝"，这时立刻产生降维了.

事实上"＝"的降维性与约束性具有同一实质，是对同一件事的不同角度的观察.

那么，数学为什么要在降维、约束的意义下，在更低维的空间来研究呢？这是因为数学的本质就是求解，而求解的本质是寻找"关系"中的"结蒂"，因此它只能存在于被约减后的空间内之故.

③ 在数学中每个函数在“＝”的意义下都有着一大类不同形式的函数. 正是这一点使得数学有着丰富的以恒等变形为特征的逻辑推演.

例 1 $4=0+4=2\times2=1\times4=2^2=2+2=\sqrt{16}=\cdots$

例 2 $\sin x=2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x=\sqrt{1-\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}2x}}=\sin\frac{1}{3}x(2\cos^2\frac{1}{3}x+\cos\frac{2}{3}x)=\cdots$$

④从逻辑上说,“＝”具有自反、传递、对称这“三性”(简称等价性). 特别地,“＝”式两端还具有必充性.

总之,“＝”的含义十分丰富,古往今来人们对“＝”的欣赏不少(进一步的欣赏参见 5.2 节).

(6)增量的平均:边际变化率、导数.

例如对于 $y=f(x)$,其因变量增量被自变量增量一“平均”即成为 $\Delta y/\Delta x$. 这在经济学上叫做边际变化率,即在自变量变到 x 处(边际)时,若再增加一个单位量,所对应的 y 的增量叫做 y 在 x 处的边际变化率. 这是 1838 年由经济数学家库尔诺(法,1801—1877)提出的.

显然,从数学来说如果 $y=f(x)$ 可导,则其边际变化率就是它的导数. 因此说经济学中边际变化率的提出,实际上是独立地重新发现了微分概念.

由于微分与积分是孪生的,有了一个就必有另一个,所以也说经济学独立发现了微积分概念.

虽然库尔诺时期离微积分法的诞生(17 世纪)已有一百多

年，但因为该时期微积分法的科学地位还处在争议期(微积分法科学地位的获得的关键在于其基础理论“极限论”的建立，不过那已是19世纪70年代的事了)，所以当时微积分学的影响还不是那么宽、深，致使库尔诺不是直接应用微积分而是重新发现它，这是容易理解的.同时这件事也再次说明了微积分原理存在的广泛性，也说明了经济学发展之深刻性.

(7)增长率相除($\frac{\Delta y}{y}/\frac{\Delta x}{x}$)：弹性.

弹性也叫弹性系数，表示为$\frac{\Delta y}{y}/\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\triangleq\alpha$.这只是经济学上的定义，它也具有广泛性，比如函数中自变量的指数即是弹性系数，通常也叫做指标、对数系数等.

例如，对于有名的柯布-道格拉斯(C-D)生产函数$Q=L^{\alpha}K^{\beta}$(L、K分别表生产要素、劳动和资金)，按弹性系数公式即不难算出弹性系数是α，β.比如有

$$\frac{\Delta Q}{\Delta L}\frac{L}{Q}=\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}\frac{L}{L^{\alpha}K^{\beta}}=\alpha$$

同理可得β.

(8)平均的社会学意义：平等、帕累托均衡.

社会史上，诸如人权的“等”，包括其概念都是经历了几千年的斗争才获得的，却在今天已能不无清晰地看到它是何等的合理、正确.因为上述(1至7段)种种事实已充分说明，“等”就是客观世界的公平点、平衡点、准心.

的确不难看出，比如今天的社会学、今天的政治不就是为着一个“等”吗？

不过，这里没有探讨社会学和政治学的使命，我们只想从数学和经济学角度来谈谈社会学中的公平和平等，那就是帕累托(Pareto)均衡.

帕累托均衡理论产生于20世纪初西方的新福利经济学，大意是说：在作资源配置时，如果达到其中任何一个人或者任何一方，若再要增加自己的配置量，都将有别人的效益(效用)受损，这样的配置状态叫做帕累托均衡，又叫帕累托最优.

简单说在作资源配置时有两类均衡，一类是数量的均衡(人人得到平均数)，另一类是效益(对商家)或叫效用(对消费者)均衡. 每类均衡皆有难和易两种情形，那么帕累托则分别研究了双方在数量均衡与效用均衡间的四种组合情形，得出实际上有多种情形都是符合帕累托均衡概念的. 可见其均衡概念是更为宽泛的，叫它做“次均衡”.

现在来个简单例子，一个旅游团在出发爬山前，宾馆发给每人一份等量食品，这是一种数量的均衡，也是通常说的均等. 若这时其中一位食量大者(甲)拿出发给他的两瓶水中一瓶与另一位食量小者(乙)自愿地交换一块面包. 显然这时甲、乙的效用都提高了，这时的资源配置却改变了. 但由于其交换是自愿的，则这时仍然处于均衡状态. 不过这时的均衡已不同于最初的数量均衡而是一种效用均衡了，即一种帕累托均衡.

当然，若交换不是自愿的，则不是均衡了，已不属于任何一种均衡类型.

帕累托均衡概念及其理论现已被广泛运用到优化理论中，形成了其中十分有用的“次最优”理论和最佳理论分支.

赏析二
公理数学与公理文化

公理(axiom)——不加证明而直接采用的事实. 看起来是多么容易、多么平凡啊. 但不要忘了，可以说整个数学都是建立在公理之上的，甚至说整个科学乃至人类生活、社会文化都是建立在公理之上的. 这不是耸人听闻，只是人类迟迟才意识到这点罢了，尽管说早在两千多年前就已创造出了公理化方法. 无怪乎人们只是在近代才对公理的研究形成一门“公理学”学科.

在今天，公理思维与公理化意识已逐步成为科学工作者甚至一般知识分子的基本修养，已经文化化了.

本讲即在于说明以上这些事实. 我们将基本上沿着公理思想在数学史中的发展进次来陈述并认识之，以与读者一起来接受它潜移默化的感染，增进我们的公理化意识.

2.1 引子:几个相关概念

为了引入公理概念,也为了以后叙述的需要,这里首先给出几个相关的概念.

2.1.1 "三定"、"三理"

所谓"三定" 即定理、定律、定义,"三理"即引理、原理、公理. 这在每个人的知识生涯中都是不可少见的也是不可回避的概念. 因此这里来分别作一简述并作比较认识.

1. 定理、定律、定义

定理,是通过逻辑推理而得到的结论,因而是在逻辑范畴内具体说是形式逻辑范畴内甚至是数理逻辑范畴内都能保证其成立的.

定律,则是经观察、实验、观测或度量得到的结论,因而只能在直观空间比如仪器可及、实验可达的物理世界和社会生活中,才能保证其成立. 当超越其实验、观测的客观条件时,则不一定成立了. 如牛顿定律,在相对论意义下即受到了动摇,但高斯基本定理(代数学)、柯西中值定理(微分学)则永远是正确的,除非逻辑空间改变了. 而逻辑空间是由宇宙运行决定的,即使相对于人类的"寿命"来,它的变化也是十分微小的. 所以可认为逻辑空间是不变的. 之所以说定理比定律来得严格、来得可靠,也是从这一意义来讲的. 也因为如此,定理一般只能是数学中逻辑意义下的结论,定律一般只能是物理学或社会学中实验、观测意义下

的结论.

相对于“定理、定律都是根据客观规律做出的结论”这点来，定义则不同.

定义，原则上它是主观给出的或说是可以具有主观性、主观偏好的.尽管一般说来下定义者也需要观察，需要尽量做到客观、符合实际，那只是为了能获得更多人接受，并非必然，并非逻辑对他的绝对要求.事实上定义可分做两大类：

一类叫做**描述性**定义，包括什么叫数学，什么叫物理，什么叫社会等等定义都是描述性的.既然叫“描述性”，站在哪一角度去描述它都不为错.比如针对“什么是数学”这一概念据说也有两百多个定义(当然，最为流行的只有一个，即“数学是研究数与形结合的形式化科学”).这就说明即使作为以精确著称的数学的“定义”，也是可以根据个人偏好去给的，足可见其主观性特征了.

另一类叫做**公理性**定义，诸如数学中从加、乘算法到微分法、积分法的定义都是公理性的.将看到，公理性定义更具有其主观特征.

顺便说一句，一般说来一个定义不存在错与不错的问题，只存在好与不好的问题、别人愿不愿接受或接受的人多寡的问题，原因就在于定义可以是“公理”，即使是描述性定义也无须要求它全面、准确，因为在定义给出之前什么是全面、准确都还说不上呢.

还要谈到一点，比如公理化定义中，不仅从整体看来定义是公理，而且构成定义的(条件集)也是一些公理(例见

2.1.2 节中 3)).

此外也看到，似乎定理是凭逻辑在描述客观对象，定律是凭观测在描述客观对象，定义则是凭认识在描述客观对象. 好像一个比一个的条件要求弱，是吗？我们说是的，不过没必要作这样的比较，因为各自的功能和用处不一样.

最后，再从一个语言格式例句来看看三个概念间的差异性：

“如果一个运动体的路程函数二阶可导，则其二阶导数是它的加速度”(定理型叙述)；

“如果运动体的路程函数二阶可导，该二阶导数叫做它的加速度”(定义型叙述)；

“实验得知，运动体的加速度等于它的路程函数的二阶导数”(定律型叙述).

它们具体的差异点免叙(请读者指出).

2. 引理、原理、公理

原则上，引理也就是定理，只是从规模或级别上说它比定理来得小，常常只是囿于某个定理的或说是作为某个定理的子定理抑或是作为某个定理的前奏来提出的. 因此引理常常只是配合定理而出现的. 不过就其本身含义来说它就是个定理，所以这里即不多说了.

下面着重谈谈原理.

原理一词的本义是指一个对象或现象发生的缘由、机理或基本道理，是回答“为什么”的.

但是，原理一词常常被引申成为(常常是临时指定的)一个这样的事实，可描述为：任何一个公认的客观事实或客观现象，

当把它作为说话、行文或论证的依据时，都叫做原理. 比如“根据相对论原理，飞行员的手表会变慢”，“根据微分原理可探知一个连续函数的几何特征”，“人们都符合一个‘从众’原理”，“血液微循环符合一个潮汐原理”等. 可见一个理论、一个方法、一个心理现象甚至一个平凡的潮汐现象皆可以被作为（引申的）原理来运用.

又如数学中有个“箱箱原理”说：三个苹果放到两个箱子里，必然至少有一个箱子里的苹果多于一个. 一般的则说，n 件物品放到 $n-1$ 个箱子里，必至少有一个箱子里多于一件物品. 这是个十分明显的事实，因此无需证明. 所以它不是定理，但却很重要，即使在深刻的现代数学中也扮演着十分基本而重要的角色，以至不是被临时取作原理，而是作为专职的“箱箱原理”放在那里随时准备作为原理被调用.

已经看到，原理的本义和引申意义差别是比较大的，一个系指事物的机理，另一个则直接指事物，并且这一引申意义用的反倒很广，不管在科技中还是生活中，随时都可能用到. 本文用到的也多是后者.

至于**公理**，它比原理更要来得广泛且平凡，这也是下段要专门谈到的.

2.1.2　公理及其系列概念

1. 公理

公理，顾名思义就是公共遵守的道理. 的确这也是一种质朴的定义. 稍作理性的定义则是已谈到的，公理系指不加证明而直

接采用的事实.公理的特点是平凡直观、不证自明,容易被认为是当然的事实(不过将看到,后者不是本质的).显然,如果是新接触公理概念者或对此还没有过思考的人,一定会感到吃惊.一是会认为这太容易、太省事了,因而它一定是个很粗糙的处理手段,以至会对"它是用在严密数学中的"这点,感到难以置信.二是认为如此平凡的事实不就是当然的吗,何足挂齿?不值得一提.

但本章将表明,恰好是公理手段才使得数学变得严格起来.不仅如此,公理也使得整个科学和整个社会生活变得严谨,否则都是经不起推敲的.历史上不管是否意识到了,它都是这样执行着的.除非你的理论是绝对真理!

换句话说,只有绝对真理才是不需要前提——公理假设的.但人类至今还没有获得过绝对真理.

实际上即使在人们没有意识到公理和公理手段之前,人们早已在"上帝"(自然规律)那只"无形的手"指引下,无意识地运用着这一手段严密地做着自己的生活、实践和理论了.反过来也可看到,过去的错误好多也正在于没有意识到这一公理手段造成的.这应该是在读完本章后的自然体会,这里即暂不举例了.

对待任一事物,有意识和无意识之下的效果是完全不同的.在无意识之下凭借的只是自然规律,而在有意识之下则更可以加上一个主观能动性.这时只要意识正确、意识到位,没有偏差,至少偏差不大时,都会必然地促进其沿着自然规律方向更快发展.

的确亦将看到,数学对公理的意识正体现了这一点.

特别地，通过对公理的这一过程的讨论，也企望我们能在事物认识的“不知→知之→认识→理解→意识”这一升华过程中，完成自己还没有完成的阶升.

2. 数学中哪些是公理

根据上述公理概念知，公理在数学中实质上的存在是很普遍的，且其存在形式也是多种多样的，不过是表现为运用了不同的术语罢了. 非为别的，完全是语言的丰富性和语言表述的优美性所致. 但其公理的实质仍然只有一个.

比如数学中随处可见的假设、设、条件、前提、假若、若等，以及所有被“定义”的事实，乃至“记”以“符号”之类的语言和术语，皆不难检验，它们都是满足公理定义的，是不加证明而采用的事实.

显然这里说的“事实”，可以是一个完整的命题，也可以是一个短语、一个术语(词汇)甚至一个符号、记号. 它们都是具有公理实质的“事实”，所以它们都属于公理.

总之，一旦意识到了“公理”，即可看出，原来数学中具有公理实质的地方十分普遍地存在着.

3. 数学中公理用在哪里

既然说数学是建立在公理之上的，那么具体说来它是怎么体现的呢？显然它应该表现在各个理论陈述部分的**前提条件**上才是. 的确如此，比如在定理叙述中它是作为定理的条件而出现.

又如，在数学模型描述客观事物(建模)时它是作为一套被命定的符号系统而出现.

再如，在一个篇、章或节的陈述之初提出来，它是作为相应理论的前提和奠基，等等. 还有就是**既成的公理**，常常也被作为原理，有着广泛用途. 现综合地略举几例以示之.

例 1 线性空间定义

设有集合 X 及 $x, y, z \in X$，再设数乘符号 $\cdot$ ，$\forall a, b \in \mathbf{R}$(实数集)，若满足下列运算定律则叫 X 做线形空间.

(1)$x+y=y+x$(交换律)

(2)$(x+y)+z=x+(y+z)$(结合律)

(3)有 $\theta \in X, \ni x+\theta=x$

(4)$\forall x \in X$，有$-x \in X, \ni x+(-x)=\theta$

(5)$a(x+y)=ax+ay$(第一分配律)

(6)$(a+b)x=ax+bx$(第二分配律)

(7)$a(bx)=(ab)x$

(8)$\mathbf{R}$ 中有单位元 1，满足 $1x=x$

根据**定义**的描述性、公理性类型可见，这是个公理性定义.

皆知，线性空间对应的是一套理论，而且是一套较为成熟的理论. 但这套理论所建立的基础——线性空间，却是定义给出的，也就是人们赋予的，也是“无须讲道理”的公理. 而且构成这一公理的仍然是一组公理，包括为定义该线性空间所设定的各种符号和运算定律(1)～(8)等.

例 2 牛顿理论和相对论的公理

尽管牛顿曾说“我不需要假说”，那只是当初他误认为他的理论就是绝对真理了. 事实上在人们意识到公理的哲学意义的今天，特别是相对论诞生之后，一目了然了. 原来牛顿理论也有

它无意识之下的公理(前提). 那就是:

光速不变;绝对时间;绝对空间,且是平直的.

相应的,相对论的公理则是:

光速不变;相对时间;相对空间,且是弯空间(流形).

例 3　阿基米德公理和选择公理

阿基米德公理: $\forall a,b\in\mathbf{R}$ 必 $\exists n\in\mathbf{N}$, $\ni n|a|>|b|$

选择公理:又叫可数公理. 在一族集合中,从每一集合任选一个元素可构成一个新集合. 这对于有限族来说是十分明显的事实,却在无穷意义下,特别在"所有集合"形成的无穷族来说问题就麻烦了,数学至今还没有把它闹清楚呐(续见本章 2.8 节).

4. 几个相关概念

围绕着"公理"这一中心概念,将产生系列的派生概念. 主要有:

公理组——一套理论,即使一个定理所需要的公理常常不止一个,往往是多个,那么把这样为着同一理论或定理的一组公理叫做公理组.

公理化——表示用公理思想、公理手段来处理、对待理论的行为和过程,叫做公理化. 因此在应用中对公理化这一术语常常用的较多.

公理系——系指满足独立性、相容性、完备性等"三性"的一个公理组. 这是当前公理化方法和公理化理论的最高形式. 具体的见后.

公理学——这是公理化思想和方法发展到现代的一个总称,亦即对公理作理论研究的过程和内容的总称. 包括建立公理

化数学分支，创建公理集合论中的公理系，以及对公理、公理化本身的推广、研究等内容皆属公理学.

公理化学科——建立在一套公理系上的学科分支叫做公理化学科.最早的，具有这一动机的，有如《几何原本》(见下节)；最近的，被认为是真正公理化学科的，有如希尔伯特的《几何基础》等.

2.2　公理化方法的创生故事

2.2.1　从毕达哥拉斯的伟大错误谈起

毕达哥拉斯(Pythagoras，希腊，公元前 580 年—公元前 500 年)，数学家.不过古代的数学家常常是集数、理、哲于一身的，这在毕氏身上表现也比较明显.毕氏不仅对算术、几何、音乐、天文等所谓“四艺”颇有贡献，而且对文法、修辞、逻辑“三科”也有研究，并且在他办的学校中还开出了这七门课.同时毕氏建立的学派尚带一定的宗教色彩，这也是一种哲学特征.

毕氏在数学方面的贡献不少，比如他发现了所谓“毕达哥拉斯定理”(又叫“勾股定理”、“商高定理”，见中国《周髀算经》)，谈到过是他发现了“黄金分割”，因为毕氏学派曾以五角星作为其会徽，而比如由五条相等线段交织成的“正五角星”(如图 2 - 1)上每一交叉点都是相关的所有线段的“黄金分

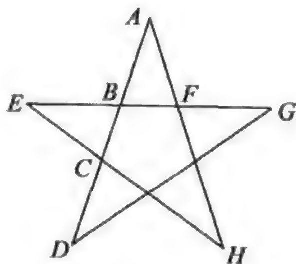


图 2 - 1

割点”. 例如图 2－1 中 B 点既是 AC 上的黄金分割点，同时又分别是 AD、EF、EG 上的黄金分割点，如此等等.

不过毕氏对数学最大的贡献，莫过于他的“伟大错误”及其带来的“伟大效应”：

碍于历史的局限性，当时毕氏根据实践、经验和直觉，错误地认为一切数都是有理数，由此产生了数学史上第一个悖论——“有理数悖论”. 从而也引起了数学史上第一次革命.

事情是当毕氏宣布他的结论后不久，即由自己学派内的人发现：以单位长 1 为边的正方形的对角线长（记为 $\sqrt{2}$ ）不是有理数，并很快用反证法给出简单证明. 此即设 $\sqrt{2}=q/p$ ，q 、p 互素，整理可得 $2p^2=q^2$，说明 q^2 是偶数，因而 q 必为偶数，设为 $q=2m$ ，则又有 $p^2=2m^2$ 从而 p 亦偶，与 q、p 互素矛盾了，证毕. 也因此给 $\sqrt{2}$ 起名为无理数.

从而也说是毕氏学派发现了无理数.

当然这也戳穿了毕氏的错误，使毕氏十分难堪. 最初毕氏还想捂住这个秘密，后来据说是被一个叫希帕苏斯的成员泄露出去了，使毕氏感到很恼火，为此还处置了希帕苏斯，把他抛到海里去了.

但不管怎样，正是毕氏的“有理数悖论”引爆了数学史上的第一场革命，因此说它也是一大贡献、一个伟大错误. 它对数学的推进主要表现为：

（1）不仅使数学，也使所有科学家受到了第一次震动，认识到科学不能仅凭直观和经验，科学家开始变得更加谨慎起来；

(2) 开始创造出一些方法来保证严谨. 比如所创造的"穷举法",在数学和哲学中都已沿用至今;

(3) 特别地,它促成了公理化方法的诞生. 具体表现在嗣后的《几何原本》中.

2.2.2 《几何原本》与公理方法

1.《几何原本》

《几何原本》系欧几里得所著. 欧几里得(Euclid)约为公元前三百多年的人,其生卒年月和出生地点皆已失考,他有十多部著作,其中以第五部《几何原本》(Elements)最为辉煌,对数学发展影响最为深远,书中除了欧氏的几何成果外还从几何角度创造性地整理了他以前的更多数学成果,也包括数论、代数的内容一共 13 卷. 后人出于它的几何特色,叫它做《几何原本》.

《几何原本》对数学历史的影响可说是绝无仅有的,据说历史上《几何原本》的翻译语种和出版发行量堪与《圣经》媲美. 甚至连一些帝王都对它感兴趣.

简单说来《几何原本》具有以下几大贡献:

(1) 充分吸取了毕达哥拉斯的教训. 为了加强理论的严谨性,充分运用了当时已创生的逻辑学,以资论证.

(2) 现代数学的形式也基本上承继着《几何原本》中的论证形式. 因此说是《几何原本》开启了现代数学形式的先河.

(3) 特别地,欧氏为了该书论证的严谨,首创了数学中公理化方法,从此为整个数学论证找到了一个非常本质的严谨手段.

不难理解,创生公理方法的思想动机来自对毕氏错误的分

析. 这时看到,错误常常出在隐晦之处. 虽然一般说隐晦之处可能(也只能)靠逻辑去达到,但是当隐晦的层次达到某种程度时,即使依靠逻辑也是不可能绝对成功的,甚至容易陷入循环论证的泥坑. 这也是常说哲学回答不了三个"为什么"的原理所在.

那么这时该怎么办? 也许解决最复杂问题的办法常常是最简单的. 用在这里即只需用一把"刀"削掉那些看起来自明但又怕重蹈毕氏覆辙的东西即可. 正如刚拔起的一个萝卜,总是拖泥带须的,为保证做菜的纯净,只需用刀将须、泥连带萝卜的皮甚至一些"肉"一起削掉,即能保证菜肴的纯净性了. 公理方法就是这样来的.

2.《几何原本》中公理组

在《几何原本》中,欧氏沿用当时哲学中刚刚萌生的"公理"和"公设"思想,提出了一套自己的 5 个公理和 5 个公设,经后人整理,则成为如下的 5 个公理(A_i)和 5 个公设(P_i):

A_1——同时等于某事物的事物间是相等的;

A_2——等量加等量仍为等量;

A_3——等量减等量仍为等量;

A_4——能彼此重合的东西是相等的;

A_5——整体大于任何部分.

P_1——从任一点到另外任一点连一线段是可能的;

P_2——把有限线段作任意延长是可能的;

P_3——以任一点为圆心,以任意长为半径作一圆是可能的;

P_4——所有直角彼此相等;

P_5——一直线与二直线相交,若同侧内角之和小于两直角

之和,则二直线任意延长后必相交且交于同侧. 这就是今天所说的"平行线公理".

这里注明几点:

(1) 不难看出,如果当初毕达哥拉斯能用上公理,比如假设是在可实际度量的范围内来讨论,那他的结论就没错了.

(2) 可看出,公理与公设相比,公理所指的事实要抽象一些、软一些,公设的则要具体一些、硬一些. 不过欧氏所用的公理、公设方式在今天已不再用了,一律都叫做公理了.

(3) 当时人们对公理的认识并没有上升到意识上来,真正促进其意识的上升是在对公设 5 的怀疑和研究之后.

(4) 公理、公设两组共 10 条,其中除了最后一条公设 5 (P_5,平行线公理)外,都是很明显的,可以自明的. 唯独公设 5 并不明显,看起来倒像是个定理而不像是个公理. 因此自然想到是否可以从前面 9 个公理推出 P_5 来?

换句话说,后人正是对公设 5 的讨论,才产生了公理间一般的"独立性"问题认识,从而才导致对公理认识的深入. 不过对公理 5 的狐疑和争执直到 19 世纪才得到解决,也是在这时不仅引起了数学上一次新的革命,而且使数学对公理的认识上升到一个新的高度(续见下节).

2.3 非欧几何的诞生:公理意识的升华

2.3.1 酝酿期三阶段

对《几何原本》中公设 5(平行线公理)的讨论是 18 世纪才逐

步热起来的. 简单地可归结为三个阶段性的工作:

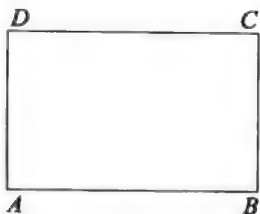


图 2 - 2

(1) 对公设 5 曾有过多种替代叙述,其中得到公认并沿用至今的要数普莱费尔(苏格兰,1748—1819)的"平行线公理":过直线外一点能且只能作一条直线平行于该直线. 于是问题归结为证明平行线公理的"独立性"了.

(2) 萨谢利(意大利,1667—1733)将平行线公理的研究转换为如图 2 - 2 的四边形 $ABCD$,其中$\angle A$、$\angle B$ 是直角,他把相等的$\angle C$ 和$\angle D$ 归结为三种可能情况,即所谓直角假设,锐角假设,钝角假设. 谢氏企图以证明锐角假设和钝角假设之不可能来归谬地证明平行线公理可由其他 9 个公理、公设推出,但未获成功.

因此对于他,平行线公理的独立性问题仍未解决.

(3) 著名的高斯、包耶和罗巴切夫斯基等数学家为证明平行线公理的"独立性"相继作出过贡献. 他们在前人工作的基础和启发下,把问题归结为"过直线外一点能作一条平行线、能作多条平行线和不能做出平行线"等三种情形来研究. 终于产生了如下的罗巴切夫斯基几何.

2.3.2 罗巴切夫斯基几何的诞生

罗巴切夫斯基(J. B. Lobachevsky,俄,1793—1856)把欧氏几何中第五公设(即平行线公理)改为:过直线外一点可作无穷多条平行线.结果逻辑地得出一套完全独立于欧几里得几何的全新的几何理论.这一成果主要有以下两大意义:

1. 它证明了欧氏第五公设(即平行线公理)是独立于其他九个公理、公设的,从而结束了一个两千余年的悬疑.

2. 它表明设立的公设(公理)不一定要"不证自明"的.这也是 2.1.2 节中所提到的"不证自明的要求不是实质性的"原理所在.当然这一条的得来并不是那么容易的,还有个历史典故哩.

罗氏在得到他的成果时已是喀山大学(也是他的母校)的校长,可是当他发表这一成果的讲演时,就连喀山大学的人也不承认,并嘲笑他,甚至骂他是疯子.以致他多次举行学术报告,详细讲解他的思想都不被接受.直到他 1856 年去世时都是这样(尽管解冻的春风这时已经在德国吹起了,可惜那时尚未过"玉门关".亦即问题真正得到解冻是在黎曼紧接着作出了进一步工作之后.)

2.3.3 黎曼几何的诞生

黎曼(G. F. B. Riemann,德,1826—1866)于 1854 年以其博士论文给出了又一套独立的几何学,被叫做黎曼几何.

黎曼几何把《几何原本》中的平行线公理假设为:过直线外一点,一条平行线都作不出来.同时改"有限线段可无限延长"公

理(P_2)为“直线是没有终端的”. 其余公理、公设基本不变. 从而得出一套全新的理论.

黎曼可比罗巴切夫斯基幸运多了,因为黎曼不仅没有受到嘲讽反而因此一举成名.

据说主持黎曼这篇博士论文答辩的主席是赫赫有名的高斯(C. F. Gauss,德,1777—1855),而高斯也曾在罗巴切夫斯基的同期得到过罗氏几何,只是出于高斯不爱发表文章的“性格”而未及时公布罢了. 所以他对黎曼的工作非常理解,并给予积极的肯定.

当然,黎曼几何得到承认的同时罗氏几何自然也翻了身. 只可惜罗巴切夫斯基未能享受到这一天.

特别地,在 20 世纪初爱因斯坦发现相对论时正好用上了黎曼几何. 换句话说,爱氏发现了相对论空间就是一种黎曼空间. 由此也给非欧几何带来更大的鼓舞.

2.3.4　非欧几何引起的一场革命

罗巴切夫斯基几何与黎曼几何合称非欧几何. 非欧几何的发生给数学特别是几何学带来了一场革命. 主要表现在:

1. 它使人们的思想特别是数学家的思想得到了一次解放,终于认识到,原来几何空间并非只有一个“直观”的欧几里得空间,而是至少还有罗氏空间、黎曼空间等“不直观”的空间.

2. 公理可以不是直观明了、不证自明的事实,也可以是不直观的. 只要其理论建立在所给公理之上,再加上逻辑推理正确,所得到的理论即应该有它的客观背景,只是这时的理论和结论

仍然不是直观的罢了.

事实上今天已经证明且证实了,人类生活所及的空间不管是就其范畴还是就其层次来说,都仅仅是客观空间的一个小部分.

那么非欧几何正在于表明了:直观和感觉并不是最终依据,逻辑才是科学的立足之本.

3. 非欧几何的出现首先是促成了几何学的一场革命. 主要表现在克莱茵(F Klein,德,1849—1925)在上述思想和当时刚刚兴起的群论思想(见 1.4 节)启迪下很快得到一个所谓"艾尔兰根纲领". 该纲领有两大贡献:

其一,数学就是个变换群,它变换来变换去、映射来映射去,其宗旨莫非是求不变量、求不变式. 简言之即"数学变来变去,旨在变中求不变". 这一思想至今也还是数学家的一种理念.

其二,在此变换群的思想下进一步发现当时刚刚萌生的"射影几何学"几乎包揽了所有几何学.

4. 从某种意义上说,非欧几何的得来似有些偶然,它不是像通常情形那样,事先猜测到,然后去努力探索得到,而是为着证明"平行线公理"的独立性无意识地获得. 这点也启发我们,科学研究应该提倡自由思考,鼓励突破性思维,也包括所谓"胡思乱想". 应该相信一个正常的知识分子,他是不会故意浪费精力去胡思乱想的,总有他一定的科学之"梦"在导引着他. 即使我们认为明显(直观上)不能成功,也不必武断地去干预追"梦"者. 不能要求别人的行为和做法各个都要合我们自己的直观理解. 当年罗巴切夫斯基的遭遇永远是个历史警训.

总之，我们不能人为地设置框框、限制思维，相反应该鼓励所有带着创造和突破意愿的积极思维．这就是非欧几何的发生给我们的又一启示．

2.4　公理学的诞生

2.4.1　形成公理学的历史条件

经由18世纪布尔逻辑和19世纪非欧几何的启发以及康托集合系列悖论的激发，终于在20世纪初诞生了一门新的逻辑学——数理逻辑学，简称数理逻辑．

简单说，所谓数理逻辑学就是把逻辑学用于一组特定的数学符号、记号、公式、规则等公理组（简称符号）所产生的推理及其内容．也就是说数理逻辑是

①纯粹建立在一组特有的、封闭的符号集上的运作；

②是纯粹依赖于逻辑推理，回避了一切直观的科学．

特别地，这时人们用数理逻辑观点于欧几里得的《几何原本》立即发现，该书的公理组有很多不严密之处．比如公设2(P_2)说直线可无限延长（即无穷），却未说它是否无界．因为黎曼指出直线的无界与无穷是不同的概念（当然这是在“大空间”意义下来说的）．又如欧氏认为以任一线段两端为中心分别以该线段为半径作圆总能相交，这在非欧几何思想下却是不一定的，因此也需要做出公理界定才算严格．

由此，再加上前述“平行线公理”讨论实质的启发，终于产生了对公理组的进一步研究如下．

2.4.2 公理系方法的产生

已谈及,公理系是对满足独立性、相容性、完备性等“三性”的公理组的特称. 这正是在上述研究经验下产生的一次思想的深入和概念的飞跃.

但要知道,要判定一个公理组是否满足“三性”倒是十分不容易的. 比如仅就一个第五公设相对于其他公理(公设)的独立性证明,就是如此的困难,何况还需要证明每一个公理相对于其他公理的独立性——证明它不能由其他公理推出.

特别地,所谓“独立性”是在逻辑意义下来说的,因而不一定直观,既可能有显见的独立性,也可能有隐讳的独立性,必然增加了分析的难度.

关于相容性——由同一公理组不能推出矛盾的结论来,也与独立性一样同时具有显见的与隐讳的两种情形,判定起来十分困难. 数学中既有的办法是专门对这一公理组去建模,以期实现公理组的宗旨,若能建成模型则相容性成立. 但是,若建不成模型呢? 并不能说明就不行.

因为建模是一种创造,是没有公式可循的,很大程度上与建模者的能力有关. 这也是“数学哲学”(见 2.8 节)中“模型论”分支的任务所在. 比如有名的“非标准分析”就是模型论中为表明一个思想,在一组相容公理下所建立起来的一套成功模型.

至于完备性——需要考察能否由公理组完全地建立起一套自恰的理论来. 所谓“完全”即该公理组(像舞台上的道具)既不能多也不能少. 这可是不容易判定的啊.

但是将看到,若能建立起一个公理系,即等于建立起了一套真正严格的、纯粹依赖于逻辑的理论体系来,意义可大了.

2.4.3 《几何基础》:一个真正的公理化学科

已经知道,把建立在公理系上的学科叫做公理化学科.不难理解,当初欧几里得著《几何原本》的初衷也是要创造一部公理化学科.可是如今站在前人的肩上,或说站在历史积淀成的高台上,抑或说是站在公理系"三性"标准上,才发现《几何原本》并不严格,漏洞多多.这在19世纪末即已被一批数学家看到了并试图弥补它.其中一项典型的工作即是当初被誉为数学无冕之王的希尔伯特(D. Hilbert,德,1862—1943)完成的《几何基础》.

《几何基础》被称为一个真正的公理化学科.皆因它是真正建立在公理系上的.为此希氏给出了一套五组二十个公理的公理组,并证明了它的"三性".从而证明其公理组是个公理系.因此《几何基础》是个公理化学科可信.

兹就《几何基础》的公理系简记于下(为便于理解,这里宁可舍弃一些严格却晦涩的叙述):

第一组,关联公理

(1)过已知两点必能作一条直线;

(2)过不同的两点只能作一条直线;

(3)在一条直线上至少有两个不同的点;

(4)过不共线的三点必能作一平面,任一平面上至少有一个点;

(5)过不共线三点只能作一个平面;

(6)若直线上有两点在同一平面上，则该直线必在这一平面上；

(7)若两平面有一公共点，则至少还有另一个公共点；

(8)至少有四个点不在同一平面上.

第二组，顺序公理

(1)若一点在另两点之间，则该三点必是共线的不同三点；

(2)同一直线上相异两点间总存在另一点；

(3)直线上相异两点间的所有点集构成线段. 线段将直线上的点集分做线段内点、端点和线段外点三类点；

(4)过不共线三点的平面，若其上一条直线过三点中两两连线之一的一个内点，则也必过另二连线之一的一个内点.

第三组，合同公理(“合同”是一种具有如下公理的关系，记为“$\equiv$”)

(1)a ，b 是直线 x 上两个点，a_1 是直线 x_1 上一点，自 a_1 在 x_1 上作一射线 x_1' ，则可在 x_1' 上找到一点 b_1，使得线段间有合同关系：$ab \equiv a_1b_1$；

(2)线段的合同关系是个等价关系——即满足自反、对称、传递“三性”的关系；

(3)若 a ，b ，c 是共线三点，且 $ab \equiv a_1b_1$ ，$bc \equiv b_1c_1$ ，则有 $ac \equiv a_1c_1$；

(4)平行于线段的合同关系，可有角的合同关系 $\angle(\alpha,\beta) \equiv \angle(\alpha_1,\beta_1)$ ，其中 α,β 和 α_1，β_1 分别为相应角的边；

(5)设 a ，b ，c 和 a_1，b_1，c_1 分别是不同直线上三点，且有

$$ab \equiv a_1b_1, ac \equiv a_1c_1, \angle bac = \angle b_1a_1c_1$$

则

$$\angle abc = \angle a_1b_1c_1$$

第四组,平行公理

两条共面的相异直线要么相交且交于唯一有限点,要么平行(交于无穷远点).

第五组,连续性公理

(1)满足阿基米德公理(其思想见 2.1.2 节);

(2)直线的完备性公理即直线上的点集是满足关联公理中的(1)、顺序公理中的(2)、合同公理中的(1)和阿基米德公理,且不能再行扩充了.

这就是《几何基础》的公理系,一个五组共 20 条的公理集.当然是经过了希尔伯特证明其相容性、独立性、完备性的,所以说它是公理系.也说《几何基础》是数学史上第一本真正的公理化学科.

2.5　集合论悖论:公理学进入第四阶段

已经谈到,所谓公理学(全称数学公理学)就是对公理的理论研究内容和过程的总称.今天看来,公理学的发展历史可分作五个阶段也是五个台阶.

第一个台阶是欧几里得在其《原本》中首创公理方法.

第二个台阶是罗巴切夫斯基突破了公理的直观性,拓展了公理的逻辑空间,把公理思想引向了深入.

第三个台阶是产生了满足独立、相容、完备等“三性”的公理系

理论. 由此便产生了“用公理系方式构筑学科”的公理化学科. 希尔伯特的《几何基础》便是第一部这样的学科著作.

以上所述三个台阶及其阶段已经讨论到了. 本节和第八节将分别讨论其第四阶段和第五阶段.

本节所要讨论的公理学跃升的第四个台阶,是由集合论悖论引出来的. 为此,分作五段来叙述,先从集合论谈起.

2.5.1 从康托集合论谈起

康托(G. Cantor, 1845—1918)出生于俄国,后来随父定居于德国柏林,于1873年12月7日以其致狄特金一封信的方式公布了他的集合论,常常径直叫做康托集合论,也称该日为集合论的生日.

尽管至今对于集合概念还没有获得一个公认的、公理化的定义,但集合概念在数学中的基础地位已是人所共识的了. 特别也是康托集合论把数学推向了新的高度和深度.

康托集合论的主要目标是认识实轴结构,主要特征是针对无穷集合. 须知无穷集合与有限集合是具有本质差异的. 比如康托既合理地把无穷分作可数与不可数两大类;指出了所有可数集合皆等价于自然数集;更一般的指出了无穷集可以等价于自己的真子集;还引入了一个“势”(推广数数、计数概念而成)的概念,以对各类无穷集合进行计数,从而进一步引出了所谓“连续统猜测”等一系列更多、更深的问题.

顺便要说的是,由于康托的系列工作给出了系列非直观的、

出乎人们意料的结论，使之成为又一个“超前思维”①者而一度得不到应有的理解和接受，以致其后半生过得十分惨淡. 特别还遭遇到当时在数学上已有一定名气的柏林大学教授克罗内克(德，1823—1891)的强烈反对，他不仅表现在学术争论上，还延展到了人际关系上. 比如克罗内克反对康托从柏林郊外一所科研条件相对较差的哈雷大学调到柏林大学来任教. 对于一位有才华而还没有名气的年轻教授来说，自然经受不起这样的权威人士来自业务和生活的双重打击了，以致康托才 40 岁就患了忧郁症，并于 1918 年死于精神病. 据说临终时身边只有一位秘书为他送终.

当然，致使康托病情加重的还有另一个原因，那就是康托集合论在发展中的一段惊人的波折——发现了悖论—— 一种逻辑意义下的矛盾，且一度未被数学认识到它的意义，反倒被认为是集合论的“逻辑隐患”，对集合论本身产生了怀疑. 因此说，集合论的创造、发展和深化不但没有给他带来安慰，反倒使他的病情雪上加霜.

2.5.2　集合论悖论的发现

在 19 世纪末，随着集合论的深入，数学界不断传出发现康托集合论中存在种种悖论. 首先是 1897 年 3 月，布拉利 · 弗蒂

①几乎所有学科的历史上都有过这样一种现象，一个新思想的提出不能及时得到认可，甚至遭到非人待遇，但若干年后又被人重新提起或重新提出，得到正式承认. 比如罗巴捷夫斯基几何、傅立叶级数、康托集合论以及非标准分析等皆属此例. 把这种现象叫做“超前思维”.

在巴洛摩数学会上宣布的“弗蒂悖论”：若设所有序数集的集合 A 是个良序集（具有严格的“$>$”或“$<$”关系的集合），将产生悖论. 因为序数集中元素可以完全排序，所以有最大元素（叫最大序数）. 设 A 的作为序数集整体的最大序数为 μ，则 A 的元素的最大序数应小于 μ，这是合理的. 那么据条件有“A 也是 A 的一元”，从而得出 $\mu<\mu$ 的悖论.

在此后十年内，还先后发现了更多悖论，诸如“理查德悖论”，“培里悖论”，“格雷林悖论”，“米里马洛夫悖论”等等. 就连康托自己也发现了所谓“最大基数悖论”等.

这些悖论中最为典型的一个，要数 1903 年由数学和逻辑学家罗素用数学语言叙述出来的“罗素悖论”. 其大意是罗素定义了一个这样的集合 A，A 以所有不属于 A 的集合作为元素. 意即这里 A 是所有集合的集合，那么这就涉及集合本身可否作为它自己的元素的问题. 这对于有限集合来说是明白的，但在“所有”的意义下问题就“不”明白了. 罗素为了使他提出来的悖论能让更多人懂得，他在提出原悖论十年后将其“翻译”成了一种脍炙人口的说法，即所谓“理发师悖论”.

理发师在自己的店招牌上标出，“我给且只给不给自己理发的人理发”，于是有人问他“你给自己理发吗？”理发师茫然了. 因若理发师不给自己理发，他就应该属于被他理发的集合，可当他属于被他理发的集合时，他又成为自己能给自己理发的人了. 反之，若理发师能给自己理发，那他就不属于被他理发的集合，因而他也就不给自己理发了. 总之，反正都是矛盾，叫它做悖论.

理发师悖论后来又被表述成“克里特岛悖论”，即一个克里

特岛人说,"克里特岛人都是撒谎的人."那么问,这个克里特岛人撒谎没有? 显然,不管他撒谎了还是没有撒谎都将产生矛盾.

2.5.3　悖论小议:一点插叙

这里悖论系逻辑悖论的简称,因此是在逻辑意义下来说的. 而逻辑是人的思维,或说是人的思维所遵循的规律,因此说悖论是不可能正面得到解决的. 除非逻辑改变了,这里已说过(见赏析一)相对于人类寿命(还有约两千多万年(见《大自然复杂性原理》,科学出版社,2004 年))来,逻辑是不可能做出如此明显改变的. 所以对于悖论只能回避,不可正面去解决它,问题只在回避的方式和技巧,而不在其他. 对于上述集合论悖论的解决方法也都是这样的"回避"法.

数学因此规定:集合整体不能作为自己的元素. 当然此举仅仅为了防避上述悖论的发生. 但是请注意这里"规定"具有公理实质. 这可是公理实质的又一个体现形式!

此外也必须看到,目前悖论概念在社会科学界乃至自然科学界都有一种广义化的趋势,甚至已推广成多种类型了,上述类型只是其中一个典型情形而已. 如图 2-3 中 M·C·埃色尔版画"瀑布"即是一种所谓"怪圈":一泻而下的瀑布经四折的沟渠又流回了原处. 这只是我们的视觉错误,是视觉受到了埃色尔艺术创造的欺骗所至,不是不可以逻辑解释的,所以它只是一种广义悖论(见《GEB——一条永恒的金带》,道·霍夫斯塔特著,乐秀成编译,四川人民出版社,1984 年).

又如社会学中的"选举悖论":A,B,C 三人对甲、乙、丙三人

进行无记名排序，结果会排不出来；“信用悖论”：十叟邀约各出一壶酒共庆重阳节，结果可能只吃到一场清水席；“囚犯悖论”：二犯隔审，若皆招则各判 5 年，若皆拒则各判 1 年，若一招一拒则拒者判 10 年，招者 0 年. 显然局外人看来他们应该皆拒，但博弈论得出的答案却是各判 5 年，因此说成悖论，实则彼此信息不公开（不确定性）造成的，并非逻辑不可解释.

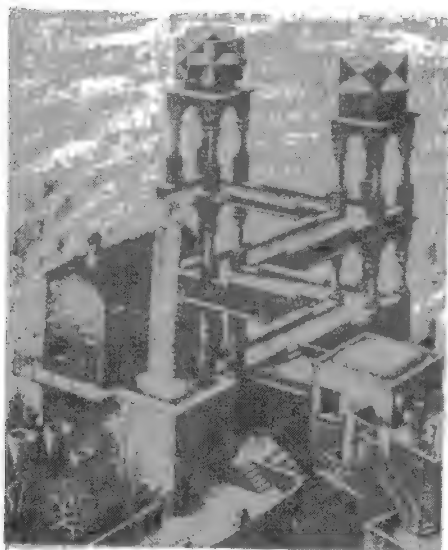


图 2 - 3

趣例：曾经兴起过一段时间的所谓“厕所文化”（在厕所墙上乱写乱画），某男厕所的墙也被画乱了，有人出来制止，他也在墙上写道“不准在此墙上写、画”，下一个人来了又写道“你不也在此墙上写、画了吗？”再后来一个又写道“你们不都在此墙上写、画了吗？”试问这样下去要到哪一天才有个了结？这也是一种悖论.

最后，再回到数学来，比如模糊逻辑中有名的“秃子悖论”：秃与不秃的概念划分问题；“麦粒堆悖论”：3 个麦粒不成堆，3^{10} 个麦粒则成堆了，问究竟多少麦粒才是成堆与不成堆的临界点？特别地，即使在分析学甚至在初等数学中也不乏这类非典型的悖论. 比如为着“迎接”复变函数论的到来，为着迎接级数理论的产生等都曾出现过好些“悖论”. 其中有贝努利-莱布尼兹悖论：积

分 $\arctan x=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，当被积式分别取级数和部分分式而分别积分后，可导得 $\frac{\pi}{4}=0$（见 3.5 节）；哥西悖论：由 $\frac{n}{1-n}=\sum_{i=1}^{\infty} n^i$ 和 $\frac{n}{n-1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n^i}$，导致矛盾的 $\frac{n}{1-n}+\frac{n}{n-1}=0=1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(n^i+\frac{1}{n^i}\right)$ 等，甚至有如下悖论：为解方程 $\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-x}$，可化为 $\frac{x+5-5(x-7)}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x}$ 或为 $\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x}$，从而得到 $7-x=13-x$ 或 $7=13$？原来 13 和 7 正好是方程不存在的点，也就是在解方程前都应该声明排除的点.

显然，以上这些都不属于严格的逻辑悖论，但历史是民众创造的，它也遵从“俗成”原则. 即一个概念、一种说法，一旦成为习惯之后，即应该得到承认. 正如文化史学家余秋雨教授说，“只能词典追随社会，而不能社会追随词典.”事实上词典上的好多多义词不就是这样随着历史而逐步推广成的么？

看来生活中还不得不承认悖论的各种推广概念呐.

不过本节所要关心的仍只是悖论的典型含义，强调为逻辑悖论，并且只关心逻辑悖论给数学带来的影响、产生的效果和带来的启示.

为此，首先让我们简要回顾一下逻辑悖论的历史.

2.5.4　逻辑悖论带来的三次数学危机

回顾数学史不难看到，悖论也是推动数学史发展的一大动力. 公认的数学史中三次大危机，也是三次大革命，都是由悖论

引起的. 第一次危机系由“有理数悖论”引起的(见 2.2 节,这里免叙).

第二次危机系由“芝诺悖论”引起. 芝诺是公元前 5 世纪的希腊人. 芝诺悖论说:亚其尔追不上乌龟(亚其尔系希腊善走之神,相当于东方神话中的夸父). 如图 2-4,设亚、龟分别位于同一直线上任一有限距离的 A_0,A_1 两点,同时同向起跑后,当亚氏跑到 A_1 时,龟已跑到A^2 了,当亚氏跑到 A_2 时,龟又跑到 A_3 了,如此下去总有当亚氏跑到 A_{n-1} 时龟则跑到 A_n $(n=1,2,3,\cdots,\infty)$ 的事实,因此说亚氏永远也追不上一只乌龟. 这显然不是事实,似乎谁都解释得清楚,但谁的解释都不能被信服. 直到 17 世纪产生了微积分方法,引起了其理论基础之争时,又重新引出了芝诺悖论问题,并被认为是又经过 200 年后,在 19 世纪随着极限论奠定了微积分的理论基础而得到了解释. 但这点并未得到公认,直到最近都还有人在为“最终”解释这一芝诺悖论而工作着呐.

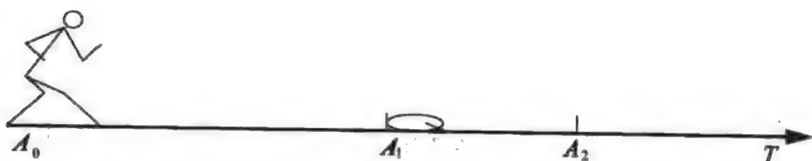


图 2-4

第三次危机则是“集合论悖论”引发的. 它所起到的作用更是革命性的,本节直到章末所要讲的全部内容亦属于它. 也是在这一革命形势下,公理学被推上了它的第四台阶和第五台阶.

2.5.5　集合论悖论引发的思考

对于集合论悖论的频频发生，引发了系列思考，其焦点也很快由对集合论的批评引申到对整个数学的透视. 虽然最初感到不可理解，认为数学如此精确、严密，为什么还会产生（或说存在）悖论？不过很快便得到了如下认识：

1. 集合论悖论的被揭示或说被暴露，不是坏事，更不是集合论的失败，恰好是它的一大贡献. 贡献之一是它给数学敲起了警钟：数学尽管有了公理学的三个阶段的进步，但数学仍不是所想象的那么严密. 数学中仍然涵存"漏子". 贡献之二是它使数学产生了第三次大革命，得到了又一次深入和发展.

2. 数学的又一次深入和发展主要表现在，悖论引起了数学的强烈反思. 不过也一度使得数学中一些最一般、最有效的概念以及最简单、最重要的推理方法都受到了质疑. 甚至连拓扑学家和"布劳威尔不动点定理"之父的布劳威尔也说他过去的研究成果都是些"废话"了. 当然这些都只能被看做是一些"矫枉过正"之词. 其真正的收获是激起了数学家们对数学中概念的构成方法和数学中的论证方法来一次逻辑的、哲学的思考.

3. 悖论本身也说明，人的思维逻辑——形式逻辑范畴是有界的. 悖论问题正出在形式逻辑范畴的边界域或说非典型区域.

4. 再考虑到，所有悖论问题都涉及"无穷"，这点也是值得重视的. 比如"理发师悖论"的问题即出在"所有的"集合的集合. 再看上面提到的"弗蒂悖论"，"最大基数悖论"，"克里特岛人悖论"等都共通地有一个"所有的". 也正是这个"所有的"使问题纳入

到一类(注意到只是一类)无穷概念中了. 将看到,悖论的产生也正是这一类无穷状态惹的祸.

5. 认识到数学危机的产生在于数学的根基尚未弄清楚. 认识到"数学的建筑与工程建筑不同,数学是先建好楼宇再筑基础."为此数学着手从基础上、根基上致力于"彻底"解决问题,这也是下一节所要重点叙述的.

6. 正是在逻辑悖论的促进下,公理学的地位也水涨船高,进入到了它的第四阶段,登上了它的第四个台阶. 主要表现为① 充分运用了构建公理系的方法;② 在构建公理系中注意到回避"所有的"这种无穷状态. 也就是增加了一条公理:系统中不能含有"所有××的集合"之类含义;③ 公理系思想充分与当时已基本成型的数理逻辑推理方法相结合. 数理逻辑的特点是在完全脱离客观背景之下、在纯粹抽象的"公理组"之下,作纯粹抽象的(常常被学生认为是枯燥的)推理.

2.6 数学的寻根热与公理学的继续发展

诚然,数学从其逻辑悖论中认识到,数学的根基问题还没有解决、数学需要寻根,这是正确的. 但是就在这寻根方式的认识上又产生了如下两个阶段的摸索过程,足可见科学发展探索道路之不平坦.

2.6.1 数学寻根Ⅰ:寻根热

在这寻根的第一阶段,人们的基本思考主体是正确的,但也

有其偏颇之处，主要表现可记为：

1. 为着提高严密性，充分运用了当时数学中最为前沿、最为得力的两大工具. 一个是数理逻辑学. 另一个是公理学前沿——公理系理论与方法，这是正确的. 但如下两点认识却把数学引向了一个过激的状态了.

2. 只把产生悖论的问题归结为“数学内在的严密性还不够”，因而只着力于数学内部的严密性建设.

3. 尤其在希尔伯特《几何基础》成功经验的鼓舞下，大家认为探寻数学的根基——数学基础的任务指日可成、唾手可得了. 而且认为只须像《几何基础》那样建立一套公理系加上数理逻辑的推理，即可严格地获得一个“完备”的数学体系，使得以后一切数学问题只须求助于既有的“完备数学”即可得到解决了.

问题更在于上述基本思想已经成为数学的一种共识，至少说已暂时成为数学的主流思想了. 这就必然形成一种社会力量，难免成为一股社会风潮.

的确，在这一风潮之下不仅数学内好些人放弃了自己的原有专业投奔到“数学基础”中来，甚至连非数学界的人也有被吸引，抱着一腔美梦投身一试，真的形成了一场数学的“掘金热”.

无独有偶，与此同期的 1908 年，也有个德国数学家佛尔夫斯克悬赏 10 万马克，以证明数论中世界三大难题之一的“费马猜测”(1637 年)：存在整数 x，y，z，n $(n>2)$ 满足 $x^n+y^n=z^n$. 由此一度引起了一个费马“掘金热”，熏得连商人都参加到这一竞争中来了，成为数学史上又一则美谈.

注：数论三大难题中的华林问题已于 20 世纪初为希尔伯特

完成；费马问题已于1994年为A·怀尔斯解决并荣获此10万马克奖金；唯有哥德巴赫问题尚未完全解决，但自70年代初由中国学者陈景润解决了倒数第二步（叫做“1+2”问题）以来，至今还保持着这一问题的世界冠军桂冠.

也许是在上述两场“掘金热”互相促进之下形成的共振，才产生了如此过热的情景.

在这场数学寻根热中，主要表现为人们都想凭着一腔热血甚至单枪匹马即可完成一套“完备”的数学体系. 具体可归为两个方面：

(1) 著作. 有名的例子如弗雷格的《算术基础》(1884年)，怀特海德和罗素合作的三卷巨著《数学原理》(1910—1913年)，希尔伯特的《数学基础》(1927年)和希尔伯特与贝纳斯合著但夭折了的巨著《数学基础》(1934年第一册，1939年第二册)等等.

(2) 学派. 有名的可举出三个学派，如下：

①直觉主义. 系不动点之父布劳威尔于1908年创立的，主张数学结论必须是可构造的、可实现的，因而是有限的、排中的；

②形式主义. 系希尔伯特于19世纪末，在其几何公理系基础上形成的，致力于“元数学”，又叫“证明论”. 其特点之一是创立了公理系概念，并在证明公理系“三性”的相容性等方面有着重大贡献；特点之二是创立了“夹叙夹议”的证明方式，拓宽了传统的公式推导型证明方式，至今为数学所通用；

③逻辑主义. 这里逻辑系指数理逻辑. 即使数理逻辑也应起自莱布尼兹(17世纪)、布尔(19世纪中叶)等. 到了19世纪末至20世纪初数理逻辑的活跃人物已不少，代表人物有罗素、哥德尔

等. 逻辑主义的信念是"数学是逻辑的一个分支". 因此他们最早致力于以其《数学原理》统率数学，虽未如愿，但至今仍不失为数学的一部经典之作.

不过这场"热火"很快被哥德尔的两篇论文给浇熄了，人们也为之清醒过来了.

2.6.2　数学寻根Ⅱ：哥德尔的两副镇静剂

数理逻辑学家哥德尔(K. Gödel，奥地利，1906—1978)于1929—1930年先后发表了《论(数学原理)中形式上不可判定命题及有关系统》一、二两篇论文，给出了两个定理，叫它做"不可判定定理".

简略说来，不可判定定理一是说，建立在自然数集上的形式化系统如果是相容的，则它是不完备的，亦即其中将存在不能证明的命题.

不可判定定理二是说，建立在自然数集上的形式化系统若是完备的，则它是不相容的，将存在来自系统内的矛盾(悖论).

从某种意义上说，哥德尔定理是针对希尔伯特企图"构建整个数学的一套相容公理系"做出的回答，且是一个否定性的回答. 可是在年轻人哥德尔的定理发表后好几年，作为泰斗的希尔伯特才不得不承认并不情愿地放弃了自己的《数学基础》宏伟计划.

哥德尔定理的最大效力是使人们认识到，企图构建一个有限完备系统去统揽数学是不可能的. 由此也使得数学中一场"掘金热"镇静了下来，人们从思想和专业上重又回归原位、回归正

常. 事实上这才是数学的正规和正轨.

这时应注意到两点：

(1) 相对于数学的寻根工程来，哥德尔定理并非全盘否定了它，只是说不可能建立起有限的数学完备系统，但并没有说用无限形式不可能. 也就是说，也有可能在无限(即无穷)的意义下构建起完备的数学系统来.

因此对“无穷”的关注也成为哥德尔定理发表后数学寻根的一个基本特点. 不过得防备系统悖论中“所有的”引出的无穷类型(续见下节).

(2) 这时数学的“寻根”变得不再热衷于全面地去构建完备数学，而是侧重于从集合论角度去探索实轴的根本结构. 将看到这时还会涉及更为深刻的无穷概念.

为此，下面先让我们回顾一下对无穷的认识.

2.7 简论无穷

人们说没有无穷就没有高等数学，也说高等数学是无穷的数学，这是为什么？可我们更要说没有无穷便没有现代数学和未来数学乃至整个前沿科学. 特别当涉及数学之根时，更离不开深层次的无穷概念和知识. 因此在进入数学寻根的当儿，不能不对无穷概念及其知识来一次哪怕是简要的回顾和认识也是必要的.

本节将阐明人类认识无穷的三个阶段，也是三个层次：极限型无穷、集合型无穷和高层空间型无穷. 它们也基本上体现了人

类对无穷认识的深入过程.

2.7.1　无穷认识初步:极限意义下的无穷

(1)关于无穷和极限的概念.

在《高等数学》课程中已明确讲到,无穷(也叫无限)是不存在的;无穷(包括无穷大 ∞ 和无穷小 $1/\infty$)都不是一个数;无穷只是一种状态,等等.

特别地,在极限意义下,无穷是用极限方式来描述的,即极限为 0 的变数叫无穷小,无穷小的倒数(也叫反演)叫做无穷大.由于无穷大和无穷小之间是作对偶地存在,以下若无特别声明,主要以无穷小来叙述.

所谓**极限**即一种用有限去表现无限的方式.自然这时的“有限”形式必须要有规律可循(表出通项)才行.事实上极限仅仅是描述无穷的一种方式,尽管在今天看来极限只是一种初等方式,但在近代数学中作用可不小.

(2)正是极限论奠定了微积分学的理论基础.

(3)在极限工具下获得了数列、级数理论以及函数的级数展开理论等等.

(4)在极限和级数理论下,系列函数论成果得以实现.比如欧拉公式: $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$,让人不可思议,但利用无穷级数展式则立即可得证了.

(5)在极限意义下给出了无穷的级别(阶)分类,使人类对无穷的认识得到初步扩展.比如设有无穷小数列 $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $n=$

1,2,…,若有 $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}=r$,则 $r=1$ 时,称二数列为等价无穷小;当 $r=c$(非 0、1 正实数)时,称二者为同阶无穷小;当 $r=0$ 时,称 $\varphi(n)$ 是比 $\psi(n)$ 更高阶的无穷小;当 $r=\infty$时,称 $\psi(n)$ 是比 $\varphi(n)$ 更高阶的无穷小.

2.7.2 无穷认识的深入:集合论意义下的无穷

1. 极限论的局限

事实上极限论的任务并非正面认识无穷,而是仅仅为了建立微积分学基础,因而说它仅只围绕着微积分学对无穷(小)的需要而部分地描述了无穷,这就是通过极限方式显示出的无穷.

但应注意到极限所得到的无穷是有约束条件的.

首先是其过程必须具有规律性,比如一个数列必须要能表出其"通项"才能说得上求极限.

其次是这一过程尽管可"任意"趋近极限点,但只能是在有限状态下,只能是通过其"趋势"来获得结论的.

却正是这点成了它的弱点,使得极限值的得来本质上是仅凭趋势而"跳"过去的.至于极限值(点)的深层的邻域结构(恰好对应着高层次空间)被它忽略了.

可是,对于无穷小世界的正面认识是不能回避这一深层次的邻域结构认识的.

2. 集合论意义下的无穷

在集合论意义下对无穷的认识恰好弥补了极限论的局限性,来得更全面了.集合论属于从集合意义下对其对象的无穷结

构的正面认识．这点主要体现在把集合分作可数集与不可数集，特别表现为对不可数集的正视与探索．

当然目前主要还只是在“势”概念下所作的攻取，不过仅仅在一个“连续统猜测”关卡上即受阻不前了．看来要等待的不是援兵，而是新的“工具”和新的“装备”．

3. 微观世界：多层空间结构中的无穷性

科学已经显示出，实轴（实数集）对应着彻底的一维物质空间，亦即实轴的数学结构对应着物质的根本结构．这里涉及多层次的空间结构，即使从现代物理学前沿也能依稀觉悟到这点．

因为随着微观物理（及其对偶——天文物理）的深化，早已突破了牛顿空间（3 维）和爱因斯坦空间（4 维）．虽然对其空间维数尚处不确定状态（有说 8 维、20 维、16 维等），但其空间要改变，不再是直观低维，已成共识．

可是今天物理学的粒子尺度相对起数学的“无穷小”来仍只是有限小，仍然还有质的差异．那么可说有望随着微观物理的继续深入，其空间特征将会进一步改变、进一步抽象化．可见它是向着“单子”所描述的空间类（可叫做超空间）逼近的．尽管要从物质角度去逼近超空间更难，但“非标准分析”表明，这种多层空间结构对于集合论认识无穷小也是颇受启迪的．

4. 宏观世界：无穷，真的不存在吗

根据“无穷小的对偶是无穷大”和“微观的对偶是宏观”这点是容易理解无穷大的．不过这里想要说明，尽管已经得知宇宙是有界无穷的、宇宙空间是弯的，但抽象地说，数学按平直坐标“走”下去的无穷是什么？再则，在现代数学中，无穷远可被作为

一个点来对待，无穷大（ ∞ ）可以以数的身份参与运算，比如两平行线在无穷远点相交，在拓扑学中有个加(无穷远)点紧致，等等，这些都是为什么？

所有这些都启示我们，无穷也是一种存在，只是它不在我们物质宇宙甚至逻辑空间内罢了.

换句话说可能存在超空间，使得物质空间都作为其子空间而“浸泡”在其中.

若这样，认识无穷的困难性和实轴结构的复杂性全都容易理解了.

2.7.3 无穷认识的“混沌期”及其展望

集合论悖论实际上是标示着人类对无穷结构的认识进入到一个(可叫做)混沌期.混沌并不是混乱，它只是事物进展的一个新的层面、新的台阶.这时的实轴结构体现为多个空间层次的交汇.因此从这一意义来说，集合论悖论产生以来的数学寻根过程就是对无穷的认识达到一个新层次的攻关过程.虽然这一过程已经经历了近一个世纪，但作为目标的远船尚未露出它的桅杆之巅呢.

最后看到了：

(1)人类认识无穷，艰苦地经历了极限论下的无穷大、无穷小，集合论下的可数无穷、不可数无穷和高层空间下的摸索等三个阶段.如今还处在第三阶段的“混沌”之中.

(2)实轴的结构、一维物质世界的根本结构、集合论探索的结构以及对无穷的根本认识等都是具有等价复杂性的任务、具

有同级别的困难度.亦即它们本质上是同一个问题,任一个的突破都将意味着其他问题的突破,任一个的解决都将意味着其他问题的解决.

因此在解决问题的时候,不应该彼此隔离,相反应该互相借鉴、彼此学习、接受启发,才是出路.我们并不认为在现有的数理逻辑内可以最终解决问题.

这也是我们对未来的一点展望和期望.

关于无穷的认识,以后还将从不同角度(比如赏析四中)谈到.

2.8　数学哲学:公理学进入第五阶段

第六节谈到,数学寻根热在哥德尔定理启示之下,终于走上了以深层次无穷为特征、以探索实轴(实数集)根本结构为突破口的正常道路.由于这时针对的是超微观对象,远不是直观可及的,不得不借助哲学思辨.

再说逻辑学也来自哲学,而数理逻辑学来自逻辑学,由于数理逻辑是数学寻根的主要工具,所以也叫此期的数学寻根做数学哲学.

2.8.1　数学哲学三大学派

这三大学派是直觉主义、形式主义、逻辑主义.这是已经讲到过的(见2.6.1节),只是这时的三大学派都变得更为稳重了,同时都以无穷(比如无穷迭代、无穷结构)作为特征了.

具体说来，直觉主义已不再企求用有限形式去寻获整个数学之根了，但它的严格性和实在性亦即“硬”数学的特征还继续保持着，尽管有人批评“在直觉主义的园地里，禾苗品种越来越萎缩”，但它在好多数学领域仍然产生着贡献也是实事.

形式主义也不再致力于用有限形式去建立整个数学的基础了，即使在构建局部学科的满足“三性”的公理系时，也注意到了从无穷的角度考虑问题，运用无穷的机制，诸如开发出超穷归纳法等即是.

至于逻辑主义，此时一方面表现为在无穷意义下以公理化、集合论、数理逻辑相结合的研究特征. 另一方面表现为先后产生了如下多个分支学科探寻数学之根.

2.8.2 逻辑主义主要分支

(1) 递归论. 创自 20 世纪 30 年代，代表人物有哥德尔等. 也被称作硬数学，旨在探讨所谓“有效计算”问题，以解决可判定和不可判定问题. 比如计算复杂性问题(焦点性问题即“$P=?NP$”)即是一个典型的判定问题. 又如当年哥德尔定理的证明即是用递归方式完成的. 它不容易引起争议，只要模型正确，其推理(迭代)过程十分直观，容易判定.

递归论的基本模型是：$f(0)=x_0, f(x_{n+1})=g(nf(x_n)), n=0,1,2,3,\cdots$，其中 $f(\cdot)$叫做递归函数.

(2) 模型论. 模型论产生于 20 世纪 50 年代. 模型即数学模型，与产生自 20 世纪 70 年代而今在整个科学界应用十分广泛的“数学模型”(又叫“数学建模”)中的模型虽属同一词汇但分属

不同学科."数学模型"中的建模是为着对客观系统作定量分析，模型论中的建模只是为着检验一个公理组或一个数学思想的合理性、真伪性.前者属于应用数学，后者属于数理逻辑学或基础数学.

如果把一组公理比作语法，则模型就是语义.亦即这时模型即相当于在一定的语法限制下来构造一个例句，如果成功，则说明该语法(公理组)是合理的.

自然，模型论的基本目标仍然是为着数学寻根，具体是针对实数集结构的集合论，以作研究.模型论的建模较之应用数学的建模来更要难得多.为此它先后创造出了多种方法：有所谓初等链法、图示法、力迫法、超积法、齐性集合法、紧性定理法等.

模型论从理论上给数理逻辑学贡献不小，比如它得到了"可判定理论"上的好些结果，证明了同一公理组下所有模型具有同构性，证明了非欧几何的真实性等.此外模型论在数学其他领域的应用也是不少的，诸如群论、域论和分析学、拓扑学、几何学等.其中一个典型的例子即如下的非标准分析.

(3) 非标准分析.系由鲁宾逊(美)于 1960 年创立，它来自模型论中的一个模型，旨在对实轴结构一种新思想作出刻画.

所谓非标准分析，是相对于经典的，建立在实轴 R 上的，以函数论、微积分为特色的"标准分析"来说的.它的基本模型是：$^{*}R=\{\langle x\rangle: x\in \bar{R}=R\cup\infty\}$.其中 $\langle x\rangle$ 叫做单子(monad)，是一个"特殊"的无穷集合，表现为集合中只有 x(标准点)属于闭实轴 $\bar{R}$，其他的(单子 x 中的)所有元素都不属于 $\bar{R}$，都叫做无穷小或非标准点，且不满足阿基米德定律(见 2.1.2 节).自然，元素

间也无大小可比性了.

显然,存在 $R \subset {}^*R$ 的关系.

非标准分析能够平行地建立起一套“标准分析”的分析内容来,好些地方还来得更为简捷.但也因为非标准分析没有创造更多的、更实质的新内容,一度受到非议,未得到应有的承认.主要是说它“只是复制已有的分析成果,没有独立存在的必要”.其实这点非为别的,只能说明批评者还没有“悟”出扩张实轴 ${}^*R$ 的实质和意义来.也的确,${}^*R$ 的结构是十分费解的.

非标准分析的支持者也不少,且越来越多,他们主要表现在积极理解和解释扩张实轴 ${}^*R$ 上,其中比如我国数学泰斗徐利治先生,在其“超结构”概念和“转换原理”下既不失数学的严谨性,又对 ${}^*R$ 及其艰涩的数理逻辑作出了进一步的解释(见《现代无穷小分析导引》,徐利治、孙广润、董加礼著,大连理工大学出版社,1990 年).

事实上,在笔者看来,鲁氏建立扩张轴 ${}^*R$ 是想表明,仅在经典物理的空间意识下来理解实轴 R 的结构是不可能彻底的.换句话说,必须提高空间层次去解读实轴(一维物质“底”空间)才有可能探知其真谛.这也许就是鲁宾逊对客观世界的透视和引入单子的用意所在.

亦即鲁氏猜测(悟)到,直观空间的深层存在着高层次的抽象空间,至少认为只有经典的物理空间和尚未证实的高层次空间一起,才能架设起真正的实轴—— 一维物质空间.

其实在今天看来,鲁氏的这一思想已表现得十分自然了.比如实轴的有理数结构即对应着经典物理空间下粒子式的排列着

的结构特征. 那么无理数所对应的结构特征是什么? 这时可以说它正好拟合着单子世界,也正好对应着现代物理学前沿中空间状态给我们的启发.

总之无理数已不再属直观空间,当然也不再满足直观空间下的直接表述特征. 这就是经典数学在揭示实数结构时对无理数不理解,认为它"无理"之所在.

事实上有了单子概念即有助于理解无理数了.

显然所有单子的非标准元素所在的空间应该仍然在实轴上,只是它的层次更高,因而更抽象,所以直观看来仍然只是一条"直线"罢了.

总之,从这一意义来理解非标准分析即可发现,它具有非常深刻的思想突破. 不仅能给数学思想带来深刻的贡献,也能给人们的思维带来深刻的启发.

今天非标准分析仍在继续发展着,不过只在数理逻辑下来发展似显不足.

(4) 公理集合论. 在康托集合论基础上,也在系列悖论的警示下,也是在哥德尔不可判定定理的制约下,集合论的发展必须谨慎. 为此,自然想到了公理化方法,特别是应该建立公理系. 因此公理集合论就这样应运而生了.

公理集合论的目标,总体说是继承康托集合论的目标——揭示实轴的根本结构,以探寻数学之根;具体说是为证明康托的"连续统猜测"(见 2.4.1 节):康托设可数集的势为$\aleph_0$,不可数集的势为序列$\aleph_i$,$i=1,2,\cdots$(已证明其为离散序列),且已证明实数集是不可数集,其势可记为 $2^{\aleph_0}$,那么康托猜测"$2^{\aleph_0}=\aleph_1$",

这就是一个基本的连续统猜测.

由"(3)"亦可知,实轴的连续统结构至少是由直观空间和高层次空间构成的,这时少不了无穷概念,而且比数学过去遇到的无穷概念更为深刻、更为复杂.也的确如此,至今公理集合论虽已经历近一个世纪,但即使在其公理系的构建上也还没有走得出"圈"呢.

关于集合论的公理系,最初有多人从多条思路行进,但主要的只有两系,一个是贝尔内斯-冯·诺依曼-哥德尔的BNG系,另一个是策麦洛-弗兰克尔-柯恩的ZFC系.如今流行的是ZFC系.它最初是由策麦洛根据康托猜测提出的一套Z系,后为弗兰克尔修改成为ZF系,1963年为年轻数学家柯恩证明,ZF系与康托猜测彼此无关,并作出进一步修改,成为ZFC系.

ZFC系由九个公理构成,它们是外延公理、空集公理、无序对公理、正则公理、替换公理、方幂公理、集公理、无限公理、选择公理等.

但是ZFC系仍不能解决问题,主要困难在于①自身的完备性不能得到证明,②仍然判定不了康托猜测是否正确,③前八个公理与第九公理的关系,构成了一个新的"谜"如下.

2.8.3 选择公理之谜:公理学登上第五个台阶

选择公理:在一个集合族中,可从每一集合中选取一个元素构成一个新的无穷集合(2.1.2节,例3).

显然,在有限的意义下选择公理是十分自然的,却一旦涉及无穷就进入迷区了.事实上至今还没有一种方法能判定选择公

理是对还是错．用上了它，时显正确，时显矛盾．同时也已证明选择公理与连续统猜测还是相互独立的，因此选择公理对于实现ZFC系的目标似乎于事无补．

同时，也说是选择公理之谜使公理学登上了它的第五个台阶，其特征是公理学又一次进入了一个盲区．当年来自《几何原本》的“第五公设”之谜算是第一次进入盲区．最后是以产生“非欧几何”的革命性突破而走出盲区．那么由此也可猜测，将来有望在“选择公理”之谜被突破之后，亦会给数学带来一场更为深刻的革命吗？

总之，这就是公理集合论的现状，也是公理学的前沿和现状．看来公理集合论离“连续统猜测”的最终解决，还只是子时望晨星．我们认为这里有待空间意识的突破、有待“无穷”概念和意识的深入．“非标准分析”思想和思维在这里是很有用的．同时还应该接受现代物理学前沿理论的思想启迪才是．也就是说，随着数学深入的需要，必须解放思想、拓宽思路，借鉴多种科学前沿的思想，必须创造更为深刻的数学理论和更新的数学领域才是出路．

2.9　公理文化与公理哲学

在几十年前谈到公理，容易认为这是数学内的术语．却在今天，公理术语已见诸一般学术刊物，包括自然科学和社会科学的了．可见公理已逐步被整个知识界意识到了，这是科学和社会发展的必然，是好事．

但这里更要表明，公理从来都是作为一种文化存在于社会中每一角落的. 同时，对公理作思辨认识会发现，其中的确蕴涵着丰富哲理.

原来公理文化也是一种自然规律，是社会的必然. 不管你意识到它与否，都得这样执行，只是意识到它以后，作有意识地推进将有利于人类事业得到更快发展.

2.9.1 科学中的公理：意识下的公理行为

如今在科学论著、科学文献中，人们已习惯于用公理、假设之类术语了，这是有意识的公理行为. 例如说新古典经济学常常是在“完全理性人假设”下来研究的，意即假设经济人只凭理智思维来从事经济活动，舍弃了对其心理行为因素的考虑. 显然这在今天看来，是很不全面的，但它那样假设倒更容易研究，更容易作定量描述，因此更容易得到漂亮成果. 可是如果它不明确提出完全理性人的前提假设，则会因其结论与真正经济人的运作因素差异大，必然与实际不符甚至非常不符，也就算不上漂亮成果了. 可见这时明确提出公理前提是何等重要.

正如所述，科学中的公理意识也是随着时代的发展而逐步上升成的，即使当初牛顿也还没有这一意识，因此才有其诙谐地说法，“我不需要假设”. 还是在进入 20 世纪以后人们在整理相对论时才指出了牛顿理论的“不变光速、不变时空、平直空间”公理(前提)实质. 由此也进一步证实了“没有绝对真理”这一实质.

此外也看到，科学的公理意识是稍微滞后于数学的，不能不说科学中公理意识的形成与借鉴数学的公理化思想和公理学理

论是不无关系的.

2.9.2　生活中的公理:无意识下的公理行为

1. 生活交流中存在的公理

生活交流中也到处存在着公理现象,只是往往显得有些隐晦或者模糊罢了.不过一旦有了公理意识就不难发现它的存在了,这里不妨以例示之.

例 1　组长来到会议室,看到只有一个人在场,互相点了点头后组长问"怎么没有人呐?"通常人们把这一事实作为语言笑话来谈,其实这不是笑话,而是一种普遍存在的也是一种自然的现象.这里仍然有个公理——即"在场的人除外",只是未作语言声明,仅是隐藏在情景之中作为两人公认的前提(公理)而存在的罢了.

例 2　当年哥伦布在一间酒吧里,面对一伙奚落他的不逞之徒,指着桌上一个熟鸡蛋问,你们能把它立在桌子上吗? 结果一个个都试了,全都不行.只见哥伦布拿起鸡蛋重重地杵向桌子,蛋立即矗立起来了.伙徒们这才醒悟到,原来他们脑子里都有一个通常的前提(公理),蛋是不能弄破的,这在此时此地已是多余的了.

2. 辩论方知公理乏

先看一例,有一辩题,"是笼中豢养的鸟幸福还是林中觅食的鸟幸福?"显然辩论双方都有丰富的理由,但是辩来辩去会发现,原来只是个"什么叫幸福"的概念之争.实际上只要把什么是幸福这一概念或叫观念统一起来就什么都明白了.须知这里统

一的概念就是公理——共同遵守的道理.

又如,对于那个脍炙人口的故事"儿童争日",其中争论的焦点仍然是个"什么叫大"的概念统一问题.原来一个是以太阳光的强弱取大,一个是以看到的太阳"饼"大小取大,焉有不争辩之理?

再如,问"是一碗稀饭多还是一碗干饭多?"甲说当然是一碗干饭多,乙不赞成,理由是一碗干饭尚能加上一瓢汤,而一碗稀饭却不能.显然这里争论的焦点仍在"多"的定义——公理界定问题上.

其实,稍许注意即可见,几乎所有辩论、所有争执都将归为或至少存在概念上的矛盾.即使说是观点的不同,最终还是个概念不统一的问题,不是吗?真是辩论方知公理乏啊.

那么,为什么总是在辩论时才知道公理的缺乏和对公理的需求呢?当然这里"辩论"也包括思维和研究时的"自我辩论".换句话说就是在越是研究问题、越是深入问题的时候,对概念的明晰性要求即越高,否则研究将深入不下去.反之,在愈是粗放、愈是简略认识问题或一般生活交往,对概念的要求则愈要低一些.

总之,概念之本是由浅至深地以多个层次客观地存放在大自然中的,人们只须根据自己的需要去发掘它.当一个概念有必要作为大家承认、共守的东西时就是公理.

3. 社会治理中的公理行为

这应该属于无意识下的公理活动.这里仅举两点:

(1) 法律是社会的公理.都知道法律一经颁布,原则上不管

你赞不赞成、理不理解都得遵守，只有立法机构比如我国的人民代表大会才有权修改、有权解释. 这对于一个普通百姓来说，不就是一种不加证明而直接采用的公理模式吗？不就是一种典型的公理行为吗？

(2) 在社会治理中少不了这样那样的政策、法规、条例、规定、公约和纪律等，甚至包括地方传统文化中一些不成文的“规矩”、风俗、习惯和“潜规则”等，显然都是一些符合公理定义的公理以及公理行为.

看来不仅科学需要公理，社会生活一样需要公理.

2.9.3　公理文化说

1. 公理文化的客观存在

已经看到，公理是一种客观存在，是一种自然规律. 它至少在产生语言时即已“潜”入到我们的生活交往中了，形成千古文化，永不磨灭，而且还在发展. 那就是当人类认识到特别是意识到它之后，便主动去利用它、增进它的结果. 已讨论到的数学公理发展史和科学研究、社会治理中有意识的公理思想与公理行为，都是人们意识到公理之后的积极表现. 所以我们说，人类文化中不仅有个公理文化，而且还是一个得到不断发展增强的文化.

2. 公理行为是一种修养

尽管说一个未意识到公理的人，只要是个正常人都会在其言行中执行着公理，但也不能不说只有有意识的公理行为才算得上公理修养. 这种修养主要表现在两个方面. 一个是在业务活动方面；另一个是在公共交往、交流方面. 前者表现为主动运用

公理且对概念很重视，从科学研究中对概念的明细要求到技术服务中合同、协议的签订都是如此. 后者表现为重视事物的前提，增强了公理意识和思维的严密性，从社会科学研究到社会生活交往都是如此. 比如社会中一些粗枝大叶的人与一些细心谨慎的人，其差别往往即表现在对公理前提和概念的重视程度上.

3. 公理文化的遐思

一个没有公理的理论只能是个无根之木、无"基"之谈，一个失去公理制约的群体只能是乌合之众. 那么，如果公理太多又将怎样呢? 比如一个线性规划模型，如果它的约束条件("公理")多到使其可行域缩成空集了，还有什么意义?

对于一个社会，公理过多会失去民主，公理不足会失去集中. 两者都是不正确的. 真理只在其间，也就是孔子说的"中庸"才是道. 所谓"中庸"就是在任一对偶事物中不可过激、不可极端，最优状态只在其间.

失去民主的集中容易产生腐败，失去集中的民主容易产生专制. 同理，没有权利的义务和没有义务的权利都是错误的. 这就是说公理组、公理系都有个"度"——既不可多也不可少的机理所在. 当然这个"度"也是因事、因时、因条件而不断变动着的. 这也是公理文化丰富性的一种表现.

2.9.4 公理的哲学思考

1. 万物皆有个"底"

但凡建筑都有个相对的基底. 这个底只有适当深度，不可建在绝对深度之上，否则把地球挖穿反倒没有底了. 无独有偶，一

门学科、一套理论都有个相对的“底”，没有绝对的“底”. 这是为什么？简单说这就是哲学，具体说是逻辑使得这样的虚、实二像走到一块了. 亦即世上一切事和物都将遵从一个共同的逻辑规律. 其中“事”也包括一切信息运作和思维活动. 这是因为根据相对论原理，逻辑是宇宙运行产生的一种机制，它具有所谓“鞅”型的动力学特征(如图 2 - 5). 亦即在这一体系中以任一初始段作为前提(相当于事物的底，或数学中的公理系)，往后将会形成一个领域，构成一个“鞅”型.

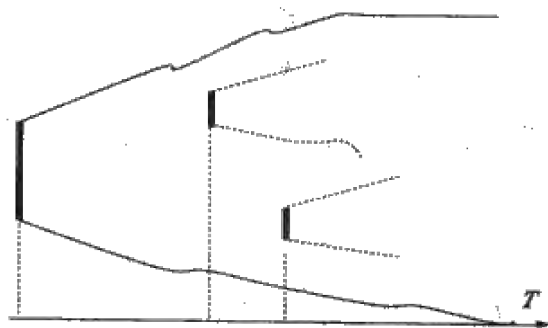


图 2 - 5　大小鞅

总之，万物皆有一个底，这个“底”就是公理. 这就是世上普遍存在公理这一实质的机理所在.

注　①一个声明：这里也应(勿须声明地)执行一个**公理**，此即所述“万物”中不应该包括整个客观世界(叫做大自然)，否则即蹈入“一切集合的集合”悖论了. 已知，数学对这样的逻辑悖论都只能采取“回避”的方式. 我们这里当然也只能“回避”了.

②一个推论：真理也是相对的. 既然万物都有个底，因此一切真理也都有个底. 那就是说，其底稍作改变真理都将改变. 这就是一种相对性表现. 换句话说，真理也是有条件的.

2. 概念(定义)再认识

已经知道,概念是脑子里对一个客观事物的反映,强调的是该事物的本身,简述为“是什么”;定义是对脑子里的概念做出的表述,要求它语言简练、精确,但对事物本身只是一个抽象和映射,不可能做到“是什么”,因此只要求做到“像什么”. 不过毕竟概念与其定义是很近的,通常即可作等价用. 本段亦将如此. 本段将在既有的概念认识基础上围绕概念的公理性作一些进一步的哲学思考.

(1) 已谈及定义有两个功能,一个是用于描述概念,以利陈述、交流. 另一个是用作公理,作为论述、推理的基底、制约和规则. 强调前一功能者叫做描述性定义,强调后一功能者叫做公理性定义.

(2) 概念是棵“树”,通常是从枝梢开始向着主干逐步深入的. “枝梢”对应着生活中粗糙、模糊、简单化的情形. 随着问题的深入或细致,要求对概念的认识应沿着概念之树由上往下、自冠向干逐步深入,表现为越来越严格、清晰. 有过科研经历的人或见过法律辩护的人抑或参加过争辩的人都会有这一体会. 这也是“辩论方知公理乏”之下的一种自然深入过程.

(3) 概念的产生是一种知识的升华、意识的提升,它来自对客观事物的感悟,受客观事物的激发,对客观事件的感慨和感触. 总之,概念是一种精神和意识上的升华. 悟性强的人更容易产生新概念,所以应该加强这一修养.

(4) 同一概念可被多人独立发现. 比如赏析一中讲到的加乘概念几乎在每个古老民族都有其自己的一套,尽管方式(技术)

各有不同，但概念(思想)是一致的．又如对微分概念的发现不仅在17世纪初几乎同时分别被英国牛顿从运动学角度发现和德国莱布尼兹从几何学角度发现，还在19世纪初被法国库尔洛(“边际分析”)从经济学角度重新发现，这些都说明概念是客观存在的，人人都可能重新去发现它、深化它．

(5) 定义的利弊谈．说到定义，往往只想到它的意义，认为它只有好处．的确，应该承认一个定义从没有产生到产生是个思维的跃升，是一个创造．有了定义，人们在思维、辨识、交流中即有了依据．

但是，从另一方面看，如果对定义认识不足也会产生“弊端”．主要的是，定义也容易使人产生麻痹，往往无意识地感觉到事情就此止步了、到顶了．比如经典物理学突破了分子概念即进入到现代物理学，经典生物学突破了细胞概念即进入到现代生物学等的艰苦经历和卓越历史，都说明了突破原有概念之难．这是为什么呢？

问题就在于，未产生突破意识之前，原有概念即在无意识中成了思维的边际和“止步牌”，以致形成所谓“习惯思维”．

比如一般“脑筋急转弯”训练题往往都是对这些“习惯思维”、“概念麻痹”的挑战，人们一旦认识到它了，即不难承认这是较为常见的、潜意识中的精神现象，它暗暗地影响着我们，主要是从负面阻碍着我们的突破和创造．

(6) 突破往往发生在概念处．观察表明，一个发明创造或思想突破往往发生于① 产生一个新概念；② 对一个既有概念的突破．因此可说突破也是针对“概念麻痹”和“习惯思维”而来的．比

如在见惯不惊的生活中第一次提出人存在“习惯思维”这一现象和概念,就是一个突破;第一次指出社会中有“非组织”现象也是一个突破.每次突破都在人们心灵里展现出一片新领地,对客观世界的认识产生一次深入.

赏析三
周期及其数学欣赏

3.1 周期感叹

日月经天、江河行地，花开花落、春去秋来，大气轮回、生命迭代，周而复始、循环往复，“盘古”开天辟地以来都是这样. 自从有了人类就意识到了它，相应词汇类也越来越多，诸如回复、振动、旋转、交替、迭荡、起伏.

不知什么时候人类提升出了“周期”这样一个量化概念，十分够人玩味的. 尽管说周期、周期函数，中学时即已熟悉，但不能不承认，只有在今天，当我们具备高等数学知识，再来“咀嚼”这一周期概念时，才会有其丰富内容，甚至会使你重新发现周期、重新感悟周期.

《道德经》说“道动而生逆”，这实际上就是对客观世界周期

规律的一种感悟.

的确,可以说正是在"周期"这个概念的促进下,人们才越来越深入地加强了对客观世界的理解.

如今,周期概念不仅广泛用于生活,更在好多科学门类中形成了相应的学科分支,比如物理科学中的波动学、振动学,经济科学中的经济周期理论,天文学中的天体轨道理论等,特别是数学中的"周期数学"最为基础,也最为基本.

直接说来,本章将从科普角度出发,结合着介绍周期数学广泛的理论成果,回顾物理科学上光辉的实际应用,展示社会生活上普遍的存在现实,以致力于提高思想认识,增强对"周期世界"的感悟,最终增强我们的能力.

这里"能力"应包括从实践中提取数学概念的能力,在新概念下进行数学推理的能力和将数学成果运用于实践时的再创造能力.

抽象说来,本章是为了说明:理论(包括周期理论)是一种抽象.它来自实际,却又高于实际,因而它又不是实际.可是实际(实践)要能得到提升却又离不开理论,因为它既能指导实践又能对实践产生认识上的深化.

最后让我们来作一个"打油"式的总结:

生活中"周期"普遍,升华则产生了周期概念;

周期理论精确优美,用于实践却又不然;

个中思想诱人兴趣,个中原理发人感叹;

这就是周期的魅力,这就是理论与实践的"悬念";

所以才有今天周期数学、周期技术的丰富多彩和内容

灿烂.

3.2　周期概念初步

3.2.1　浅说概念

概念有两个含义.一个是作为动词的概念，又叫概念化；另一个是作为名词的概念，将看到它类似于定义但又不同于定义.

概念化是形成概念的前提、阶段和过程，或说是一个步骤，十分重要.其重要性不在别的，仅在于概念化是一种意识上的升华.它能从客观存在的现象中经过精神上的“提升”而成为主观意识中的一种认识.这是只有充分进化了的人类才可能有的一种能力.否则没有这种精神上的提升——概念化，是谈不上意识中形成概念的.

此外也必须看到，概念化成的东西并不就是原事物(原对象)原原本本的写照，而是可能作了抽象加工的.这种加工可能抛弃某些他认为次要的或“无用”的成分，只留下“有用”的、精华的东西，使得概念化成的东西在更高层次上成为更有意义的东西.

相对说来，概念则是在脑子里将上述“概念化”的客观事物主观化了的东西，是进行了逻辑整理后得到的一种形式.通常更是指进一步将脑子里呈现出的这一客观事物用主观语言(可以是口语、文字、符号、肢体等的各种语言)表现出来的叫做概念.

特别地，当其描述的语言精练、简洁，具有“命题”式特征时，叫这样的概念做定义. 概念与定义常常被认为是完全一致的. 本着“对看似相同的知识应力求找出它们的差异点；对看似不同的知识应力求找出它们的共同点”的经验，这里特别指出它们的差异点，那就是：概念是回答“是什么”的，强调客观性；定义是回答“像什么”的，具有主观性.

3.2.2 周期概念的形成

1. 周期的概念化过程

把上述概念化过程用于描述周期的形成过程容易看到，尽管客观世界中周期现象从来都存在在那里，比如太阳落下了又要起来，春天去了又要回来，花儿谢了又要开放等，即使人的前身——猿、猴时期也都天天能看到、感受到，但在其大脑思维功能尚未正式形成之前，或说在人的显意识和思维还没有正式形成之前，人(猿)对这些周期现象仍然是视而不见、听而不闻的，或说是毫无意识、熟视无睹的. 仅当人的显意识进化到能够对这些现象提出问题，问个为什么或感到惊讶时，才意味着概念化能力的开始. 当其进一步进化到能对这些现象作出总结、归纳时，概念化的升华才得以产生.

总之，人类在客观世界从来就有的周期现象面前，存在一个无意识时期和过渡到的有(显)意识时期. 概念化过程即存在于显意识时期. 这时又分作两个阶段——提问(包括警觉)阶段和归纳(升华)阶段. 终于形成一个周期原理.

周期原理：认识到对于永远处于运动状态的自然和大自然

来说，一切事物中都可能存在周期或周期性，值得我们以周期的观点去认识它或致力于寻找它的周期或周期性，这就叫做周期原理.

2. 周期概念与定义

根据"概念"的定义（本段"一"），只要归纳上述种种现象，所得到的即是周期概念了. 它可以用比喻、举例等各种方式来描述，不拘形式. 将其稍作简练、明确地叙述即成为周期的定义了. 比如下面的叙述即可作为周期的一种定义.

定义 1　周期现象是个等量的重复过程. 把这时的"等量"叫做它的周期.

比如，自古已经观察到，除了自然界中日、月、年的"重复"；生物界中的花果轮回、生命"重复"；生活中的起居重复、饥饿重复等种种等量重复现象外，还有人为的等量重复实践，诸如用尺做长度的度量，用斗做（谷米的）容积度量，乃至计量汽车行出的里程等，都是一些等量重复过程，也就是周期过程.

还要注意到这里"重复"的含义有两个，一个是度量方式或时间单位的重复，另一个是其（周期）现象的重复. 这点在下面的定义 2 中即能看得更清楚.

随着科学的发展，人类对周期世界的认识越来越深入、越来越细致了. 比如发现一种螟虫每七年才一个生命周期，即每七年出土繁殖、兴旺一次. 又如大熊猫的主要食源——箭竹，每七十六年开一次花，使熊猫遭受一次劫难. 再则，从总体上说地球上的水也是作周期循环的，否则陆地上的水流归大海后即不再（从天上）回来，那就不是今天的地球了（但遗憾，溶于水的矿物如盐

类流入大海后不能自然循环). 甚至比如哺乳动物种群的灭绝也有个周期. 2006 年 10 月某报载,荷兰考古学家简·万·达姆通过对过去 2200 万年中已灭绝的 132 种哺乳动物化石考察发现地球上每隔 250 万年便会出现一次哺乳(高等)动物大灭绝. 其起因被认为是地球绕日轨道有个以 250 万年为周期的"椭圆—圆—椭圆"周期性变动.

总之可见,周期是个等量的重复过程.

3.2.3 周期的基本性质及在实践上的深入

性质 1 在周期概念下,利用有限可以作无穷度量(常常形象地说成"用有限可以度量无穷").

根据上述分析,这是容易理解的. 那么,反过来是否可以说,要做无穷度量必须是周期的呢? 这点留作思考,以后再作回答.

性质 2 周期是客观事物中一种基本的规律.

试想我们通常所说的"研究",本质是什么? 其实,这对于运动着的事物来说就是"找规律",而最为基本的规律就是寻找其中的周期特征. 一旦找到一个周期或类周期的特征即算找到了一个规律,就是一项成果.

性质 3 周期的机理来自旋转.

换句话说,旋转或回转是产生周期现象的客观机制. 亦即任何一个周期现象背后都存在一个具有旋转实质的机理. 不过这里尚难以对它作出严格证明,只能作为一种观测、定律或说"猜测"叙述出来,不再深入.

性质 4 周期不必是时间意义的.

或说“周期”中强调的只是“周”(循回)而不是“期”(时期).

从上述诸例已经看到，周期概念不一定是个时间(期)概念，亦即可以不用时间来计量，只要是等量的重复过程皆可. 或说这里的“期”已被抽象化了.

例　从农历的编制可看出古代人类对周期认识的深入性. 农历又叫阴历、旧历、皇历、阴阳历什么的，总地可称它们做古代历法. 奇而不奇的是几乎所有古老民族都自然地创造出自己的历法，都不谋而合地表现为以农耕需求为背景；对日、月运转中各种周期现象和天象气候中种种周期现象的细致观察、总结、归纳和利用. 其实这正是人类意识共同进化的一个例证，是人类进化程度的一种体现.

3.3　周期数学Ⅰ:周期的函数认识

现在将周期概念在定义 1 的基础上再作一次提升. 这就进入到了周期数学的范畴. 本节是在数学意义下对周期的数学定义和初等的周期函数作出个简略的描述.(本节内容可参见《周期函数初论》，宣立新等著，安徽教育出版社，1990 年)

3.3.1　关于周期函数

定义 2　(周期函数、周期)：对于函数 $f(x)$，如果存在一个实数 $p(\neq 0)$，满足 $f(x+p)=f(x-p)=f(x)$，$\forall x\in D(f)$(f 的定义域)，则称 $f(x)$是个周期函数，p 称做它的一个周期，周期集合中存在最小者(记为 p_0)，称之为最小周期.

注 1 根据定义 2 即可看到，定义 1 中所说“等量重复”的含义其实有两种. 一种是指自变量的等量重复式的增(减)；另一种是函数值的等量重复.

注 2 对于周期函数的定义可有多种，仅仅对这一“定义”的研究也是较为丰富的. 比如根据对定义的定义，定义不必全等于概念，所以不同的定义不一定都等价. 这里(定义 2)只选择了一个较为流行的定义.

注 3 仅就周期函数的定义域($D(f)$)作不同的讨论，也可有多种周期函数的研究内容. 诸如有以连续实轴、实轴上的子集合，以及复平面、复平面的子集等(后者将在后面谈到)作为定义域的研究者.

注 4 尽管可以说关于周期函数的初等研究已较成熟，但是至今在这方面仍然不断有论文发表，可见周期函数的实践和理论都是十分丰富的.

3.3.2 周期函数的一般性质

性质 1 周期函数的定义域都是趋向无穷(∞)的.

这是容易证明的. 因为对于周期为 p 的函数 $f(x)$，据周期函数定义应有 $f(x+p)=f(x)$，亦即 $x+p\in D(f)$，以此类推，可有 $f(x+np)=f(x+(n-1)p)=f(x)$，$x\in D(f)$，$n\in \mathbf{Z}$(整数集). 当 $n\to\infty$时，即说明 $D(f)$是伸向无穷远的.

性质 2 周期函数的复合函数是周期函数.

这是显然的，因为假设有 n 重复合函数 $y=f_n\cdot f_{n-1}\cdot\cdots\cdot f_1(x)$，其中各重函数皆为周期函数，则最后一重函数(整体)必

然也是周期函数. 但显然各重周期函数的周期是不一定相同的.

性质 3　周期函数的特例:

(1)0 周期函数. 比如常数函数(包括 0)即属 0 周期函数,但它们不归入通常的周期函数类.

(2)∞周期函数. 没有周期的函数皆可视为无穷(∞)周期函数,简单的如指数函数、线性函数等都是.

(3) 变周期函数. 比如 $\sin\frac{1}{x}$, $x\in\mathbf{R}$,这时函数值在作着等量重复,但自变量却并不作相应的等量重复.

(4)无穷小周期函数. 这是一种特殊情形,至今还只见于人为构造的特例,典型的例子有**狄利克雷函数**:

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{R}_r & \text{(有理数集)}\\ 0, x\in\mathbf{R}_i & \text{(无理数集)}\end{cases}$$

注意到这时 $f(x)$的周期为无穷小,但不是 0.

以上各种情形一般叫做非周期函数情形,有时也可作为周期函数的特殊情形来对待.

3.3.3　三角函数都是周期函数吗

三角函数乃至三角学是在中学里即已熟知的一门学科. 这里仅作为周期函数的周期性来讨论它.

在中学时,三角函数的概念仅仅是通过直观来引入的,现在在高等数学知识(主要是极限和无穷概念等知识和修养)下,我们已能对其作出自然的理解了.

首先我们知道三角函数是以角度为自变量的函数,同时知

道，三角函数作为角度的函数是用直角三角形的边之间的关系来表征的.

那么比如对于正弦函数 $\sin x$，当 $x\to\pi/2$（或 $3\pi/2$）时，锐角 x 的对边与斜边虽然皆趋于无穷大，但其比值却是趋于 1（或 -1）的. 同时知道当 $x\to 0$（或 π）时，相应边的比是趋于 0 的. 特别知道虽然这只是一个（正）周期（$p_0=2\pi$）内的规律，但在任意周期内情况都是一样的.

同理能理解余弦函数、正切函数、余切函数乃至正割函数、余割函数及其反函数等的“周期”变动情形. 所有这些三角函数都叫做基本三角函数.

特别地，比如对于正切函数 $\tan x$，如图 3-1，其最小周期是 π，设 $p_0=(-\pi/2,\pi/2)$，当在 $\pm\pi/2$ 处，乃至各个周期的端点处，其值皆为（$\pm$）∞—— 不存在，属二类间断点. 这时由于我们对其极限过程已有一定的理解，因此不至于紧张，运算起来同样是方便的，就好像 ∞ 也是一个数一样的方便，不是吗？

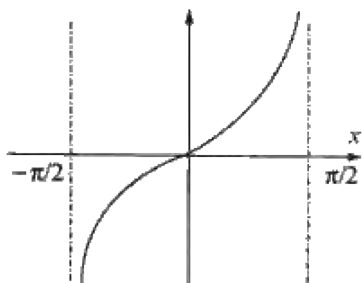


图 3-1

总之，不难看到基本三角函数都是周期函数. 那么再问，这种周期函数是否仅因为其自变量是周期地增加而成的呢？答案是否定的. 事实上比如一般实数的改变不也是以某个单位长“周期”地改变而成的吗？再说，三角函数的自变量 —— 角度，在运算中常常是换算或直接表为所谓“弧度”制进行的. 将看到在弧

度制下，角度与长度是一致的了. 所以三角函数的周期性不在于它的自变量变动特征，仅在于其“函数”的定义方式.

3.3.4 四则运算下三角函数的周期性

1. 角度(自变量)作四则运算下的三角函数仍然具有周期性，只是其周期可能改变而已.

比如 $\sin x$ 与 $\sin x^2$ 皆为周期函数，但其周期，前者是 $2k\pi$，后者则是 $\sqrt{2k\pi}$，k 为正整数.

周期性讨论更为复杂的是三角函数经运算而成的函数，这里仅讨论四则运算而成的函数.

2. 三角函数经四则运算成的函数不一定具有周期性.

这是因为，若称运算后的函数周期为合成周期，则合成周期等于参与运算各周期函数(叫做分周期)的最小公倍数. 但数组间的最小公倍数是不一定存在的. 比如当各分周期中同时存在有理数周期与无理数周期时，即不存在其最小公倍数. 因若存在，设它是无理数则分周期中的有理数周期除不尽它；设它是有理数则分周期中的无理数周期除不尽它，所以这时不可能有最小公倍数. 事实上即使分周期都是无理数，它们也不一定有最小公倍数.

正是这类情形的存在造成了三角函数运算中周期性讨论的复杂性，这里仅举例说明.

例 1 求 $f(x)=-\frac{3}{2}\sin(2\sqrt{3}x+\frac{\pi}{5})+\frac{1}{3}\cos(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3})$ 的最小周期 p_0 解. 因为第二项可化为 $\frac{1}{3}\cos(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3})=$

$\frac{1}{3}\sin(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6})$，再据有关理论(见《周期函数初论》)，对于两个一般正弦函数之和函数 $f_0(x)=a_1\sin(\omega_1 x+\varphi_1)+a_2\sin(\omega_2 x+\varphi_2)$，若$\frac{\omega_2}{\omega_1}$为有理数，则 $f_0(x)$是周期函数，否则不是周期函数. 据此，在原式 $f(x)=-\frac{3}{2}\sin(2\sqrt{3}x+\frac{\pi}{5})+\frac{1}{3}\sin(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6})$中，由于$\frac{1/\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{6}$为有理数，所以 $f(x)$是周期函数.

例 2 在 $f(x)=a\sin\pi x+b\sin 2x$ 中(a,b 为常数)，由于 $2/\pi$ 非有理数，所以 $f(x)$不是周期函数.

由此可见，除了基本三角函数皆周期函数外，并非所有三角函数皆周期函数.

最后我们来讨论一个实际问题.

例 3 铁路钢轨长与车轮周长之比值，以什么为最优？

首先，从理论上说，答案应是以无理数为最优.

这是因为，设一根钢轨长度(包括一端接缝长度)为有理数(技术上也只能为有理数)L，车轮周长(也只能)为有理数 l，则车轮上任一点，每经 L,l 的最小公倍数(记为$[L,l]$)长度，都将周期性地与钢轨接头碰撞一次，磨损自然更大. 仅当 L,l 无最小公倍数(比如有一个是无理数)时，原则上才不会有这种周期性的碰撞情形产生，所以说是以无理数比值为最优.

但这却是不可能技术实现的. 实践中怎么办呢？这时可以参考上述结论，让其比值具有更多位数的小数点总是可以的.

也就是说，虽然$[L,l]$不是无理数，却可以设计得使其比值$L:l=r$的小数点后位数尽量多. 这一来最小公倍数$[L,l]$将会更大，那么轮周上的点碰撞接头的周期将更长.

3.3.5　为什么高等数学中的三角函数自变量必须用弧度制

这是因为在高等数学中需要作一般函数包括代数函数与超越函数间的运算. 简单说代数函数即多项式和有理式，或即自变量直接作四则运算而成的形式（也包括同数相乘所得的乘方）；超越函数即非代数函数，包括三角函数、指数函数、对数函数以及无理式等.

同时，在同一运算式中同一变量应该是同一个坐标系内的同一个量，它表示同一个对象、同一个量纲，因此说同一个算式中的自变量是相同的量. 比如$f(x)=1+2x^2-e^x\sin x$，显然其中自变量x是同一个量，但是在三角函数中的x应该是角度，而在三角函数以外的x显然不是角度，这怎么能统一呢？

首先看到，三角函数以外的x是坐标系里（坐标轴上）的量，既可看做抽象量又可看做具有（坐标轴）长度的量纲.

那么若能将三角函数中变量x的"度"（记为x°）量纲转换为坐标轴的长度量纲，问题即解决了.

已谈到过（赏析一）这是可行的，只要作变换$\frac{\pi}{180^\circ}x^\circ=\frac{x^\circ}{180^\circ}\pi$（弧度）$=x$（长度）即可. 亦即这时角度$x^\circ$的弧度就是坐标系中的$x$长度.

其实所谓"弧度"莫非单位圆圆心角所对的圆弧的长度而

已，所以这是合理的.

总之，只要一般的在三角函数中采用了弧度制，即可保证它参与所有的运算活动了. 这就是高等数学中对三角函数的“角度”规定采用弧度制的机理所在.

3.4 周期概念回到实践

本节将表明，尽管周期概念来自客观实际，但一经提升为抽象定义并由此形成理论后再“反哺”、回用于实践却又发现它并不完全符合实际.

首先即可看到，人们最为熟悉且历来认为周期性最强的“时间”，并不具有我们“周期数学”中的周期.

可是从另一方面，随着人类科技的发展、社会的进步，现已离不开科学的周期概念了，或说今天需要以科学的周期概念为标准去利用客观世界的“周期”，为人类服务. 这就产生了一个主、客观上的矛盾，从而促成了周期科技的形成和发展，也促进了周期概念和周期理论的深化，甚至可能推动周期哲学的形成，现分别来谈谈.

3.4.1 周期科技的困惑

在利用周期于发展科学、服务社会、提高生活质量方面，可谓形成了一个“周期科技”. 熟知周期科技也是相当艰深的. 这里仅举一例以示之.

例 时间科学和时间技术. 不管在自然科学还是工程技术

中，它都是一门重要的学科．我国在这方面也有专门的研究机构，还有专门的国家授时中心（设在中国科学院），在时间科学方面也有我们的院士．

表现在应用上的时间科学首先是计时器——时钟的标准性和精确性研究．这涉及太空中天文定位问题和钟表制造上的材料、技术问题．这方面，虽然已在瑞士钟表技术史和现代天文学支撑下，有了诸如石英钟、电波钟之类用上了音叉振荡器、石英谐振器等精密技术，达到几万年才差一秒的精度，但毕竟还不是精确的，也就是仍然没有获得定义 2 中的周期．

其次是年、月的周期测量问题，这也是个涉及天文科学理论和技术的深刻问题．尽管已有了万年历的精确性，但仍然说至今还没有得到年、月的精确周期．

事实上，宇宙中的时间本来就没有固定的周期，这是因为宇宙的运行轨道和速度也是在缓变着的．

问　周期定义与客观矛盾的机理何在？

这有两种情形，一种是因为定义的严格周期是不变的、“绝对”的，而客观周期却是随着客观世界在缓变着的、是相对的，就连一个比较标准也很难确定．比如日、地、月的运转及其相应的周期标准的确定即是如此，因此说严格的周期标准和客观实际是很难吻合的．另一种是在实践中作技术实现的周期只能是有理数，而客观周期却可能是无理数或接近无理数的数（小数位很多的有理数），这时仍然很难实现技术的吻合．

3.4.2 实践促进周期概念的推广

既然严格的周期定义在实践中很难实现，而随着理论和实践的推进又需要弥合这一差异，那么该怎么办呢？我们说除了前述从技术上去寻找客观的、标准的周期外，把周期概念作出适当推广也是一种方式，这就是本段所要讨论的. 对此，除了前面谈到的 0 周期、∞ 周期、无穷小周期外，还有如下几种.

1. 点周期

实践中好多时候用的都是点周期概念. 比如，只看到某邻居每天早上 7:50 准时出门，下午 6:10 准时进门，因此说他有一个在其家门口这一定点处定时出现的周期规律，不过并不知道他在上午 7:50～下午 6:10 这一周期内的活动规律. 又如，有不少种类的海鱼都将定期回到各自选定的淡水江河中去产卵. 显然我们观察到的也只是一种定点、定期重复出现的现象. 这显然也是一种周期现象，但不是定义 2 那样的典型的周期现象. 把这样的周期现象叫做点周期现象. 这时的“周期”叫做点周期. 也叫这样的“函数”做点周期函数.

点周期内的点也可以不止一个点，可以是多个点甚至点列. 只要在每个点都满足“点周期”定义即可.

例 设有周期函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)=\mathbf{R}$，记其值域为 $U(f)$，则对于 $\forall\, y_i\in U(f)$ 皆有其“点周期”集 $\{x_{ij}\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathbf{R}$.

在上述意义下可以说，人们观察客观世界时得到的往往都是点周期现象，甚至比如对好多野生动物的考察以及对许多星球的运行规律考察都只能是这样.

2. 拟周期

当两个或多个周期函数作四则运算后，若形成的是非周期函数，如果该函数有界且与自变量轴的交点集为无穷集，则称这样的函数为拟周期函数.

之所以要从非周期函数中再提出这一类“拟周期”函数来，是为着实践的需要. 因为这类函数虽然“没有”周期，但也具有周期的好些特质. 比如它有界、与自变量轴有无穷多个交点等都是利于其规律性认识的.

对于非周期函数的探讨，能有这样的规律可循已经是很好的信息了. 足见在探讨函数规律时，哪怕是“拟周期”信息对研究者来说也是何等的重要啊.

3. 殆周期

又叫概周期、准周期，是 1924 年提出来的. 其思想是它“基本上”是个周期函数. 亦即若把它的各个周期曲线叠放到一个周期上来看时，这样的曲线集似乎存在一个公共的(具有统计意义的)周期曲线. 其具体的数学定义可叙述为：

对于 $f(x)$ 及 $\forall\epsilon>0$，若其 ϵ-移位数集 $T(f,\epsilon)=\{\tau:|f(x+\tau)-f(x)|<\epsilon,x\in\mathbf{R}\}$ 是相对稠密的(即考察的点数一定时，ϵ 愈小，其 ϵ-移位数集的密度愈大)，则称 $f(x)$ 为殆周期函数.

显然殆周期概念也是从非周期函数中析出的又一类有利于探讨其规律的函数类.

4. 迭代中的周期性

在今天，迭代概念已是人们十分熟悉的了. 因为几乎可以说

用计算机处理一切问题的基本过程都是以迭代方式产生的，或说计算机的一切程序和语言，其基本特征和基本动因就是迭代.

显然，迭代活动就是一种周期运动，因而它一经产生原则上即可任意进行下去. 所以对于计算机只要建起了模型，有了初始条件，以后的则全是它的事了.

更为要紧的还在于，数学模型中不管是连续的还是离散的都适合于计算机运行的迭代性，这就使得计算机更能大展威力了.

比如有名的“四色问题”（猜测“任何地图的着色，只要四种颜色即可保证两两图间的公共边不会遇到同色”），即是借助计算机的迭代来证明的；分形理论也是借助计算机的迭代发现了很多优美的分形结构图案；离散动力系统也借助计算机迭代展现了混沌和奇异吸引子等系列漂亮的结果；好多数学家也都借助计算机的计算来巩固和支持自己的证明思路呐.

特别地，现在还产生了一个专门的“机器证明”数学分支. 这是由我国数学家吴文俊院士于 20 世纪 70 年代创立，后为张景中院士发展了的学科.

总之，似乎可以看到，凡是有周期的地方，就大有生命力，大有搞头.

3.4.3 数列与周期

现在来看看周期在“数列”这一无穷结构中的体现和特点.

首先看看，什么叫做“数列”？

可定义为：由一个有序的无穷多“项”（或叫元素）构成的集

合叫做数列.

该定义表明数列的“项”其内容可以是宽泛的. 比如可以是数、代表数的符号、函数等. 特别地，其“项”也可以是代表通常事物对象的一般符号，这时莫非是“数列”变成了(一般的)“叙列”而已. 但它们都应具有一个重要因素，那就是它必须要有“通项”，亦即必须能一般的表达出它的“通项”来. 这点并未从定义中直接表达出来，但它是含在了“有序性”和“无穷项”两个条件中的.

也就是说，为要一般的表达出通项来，该“通项”必须是自然数通有元(记为 n，$n\subset\mathbf{N}$(自然数))的函数，包括以自然数为其编号(脚标)也是一种函数形式.

例 1　$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$和$\{a_n\}$，$n=1,2,\cdots$是同一个数列，其中 a_n 满足通项定义，因而是通项. 当 a_n 不表示数而是一般事物时，可广义地叫数列做叙列(或序列).

例 2　$a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$和 $1,2,3,4,5,\cdots$都不是我们定义的数列，尽管其规律已“看出来”了. 为什么要这样定义呢? 原来只是为着数列的“功用”需要，不是吗?

例 3　$\left\{\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}\right\}$，$n\in\mathbf{N}$，即是一个数列.

由这些讨论知道了，数列是具有规律的，这一规律即是一种“周期”，但它却不能只知道第一“周期”(第一项)或第一、二“周期”就行了、就可以一直进行下去了. 哲学上一个有名的“火鸡悖论”最能说明这一问题.

感恩节前，一只火鸡被主人买了回来，第一天上午十点钟主

人给它喂食来了，第二天上午十点钟又给它送食来了，火鸡以此判定每天上午十时，主人都应该给它送食来了. 可是第三天上午十时主人虽然来了，却没有送食来，而是端着血盆提着刀杀它来了.

逻辑上说，即使知道任意有限项的“规律”都不是总体规律，必须要能认定其通有规律才行，哪怕只是在知道第一、二项后宣布“以第一、二步作为周期递进下去”也行. 因为出于数列的使命，特别是用于求极限时，没有通项是不可能完成的. 所以“通项”对数列来说是十分核心的东西.

3.5 周期的机理探讨(Ⅰ)

3.5.1 周期的发生

首先，已经看到，周期是在运动意义下产生的一种现象，或说有周期必有运动(但反之则不一定). 因而要探讨周期的机理需要从运动谈起.

其次，也要看到，科学上已判定出，运动唯一地等于“平移”与“旋转”两种形式或叫两种成分的合成. 那么不难看出，周期应该产生于其中的“旋转”一面.

这种“平移＋旋转＝完全运动”的实质在极坐标系中也是表现得很充分的. 因为极坐标系能用极轴(直线运动)与旋转坐标表现出整个空间(不仅是二维空间，也可以是三维甚至更高维空间).

不过，亦须承认，仅仅有旋转还不一定就有周期(即周期函

数). 因为根据定义 2,周期函数的发生应满足两条——时间或自变量的等量重复;函数值或相应现象的重复出现. 所以说在旋转这一“周期”发生的同时还要求有“周期现象”的重复出现才有通常说的周期的发生.

为了进一步揭示周期的实质,现在来看看复数的结构特征.

3.5.2　复数的特征回顾

复数(记为 $z=x+yi$)及复数的基本运算已为大家熟悉,这里仅围绕着它的周期性做一些讨论.

1. 从其虚数的旋转特征谈起

如图 3-2,虚数 i 具有正(逆时针)方向以 $\pi/2$ 为单位旋转的功能. 即比如在实轴上任一长(设为 1)处乘以 i 即转到虚轴上了(长度不变),再乘以 i 则又转 $\pi/2$,到负实轴上了,如此再用 i 连续作用两次即回到原位,产生一个周期.

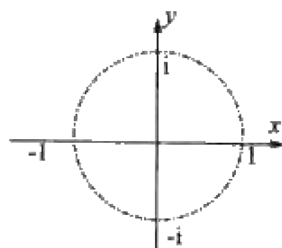


图 3-2

那么是否可以连续旋转呢? 可以的,这是为欧拉公式回答了的,此即

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\
e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \\
\cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\
\sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}
\end{aligned}
\tag{3-5-1}
$$

其中,$\varphi\in\mathbf{R}$,且可连续改变.

（注：式(3-5-1)的证明在今天已很初等了，只需对 $e^{i\varphi}$、$\cos\varphi$、$\sin\varphi$ 分别做级数展开再分别代入，便立即可得了，兹免．）

比如取 $\varphi=\pi/4$ 时即有 $e^{i\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$，正好是单位圆中第一象限 1/2 弧长的函数值．

看起来似乎复数包括复变函数都来的很容易，其实不然．须知在 18 世纪上半叶复变函数孕育期，曾有过不少谜题长期困扰着人们．这里略举一例．

例 莱布尼茨诡辩：

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\int_0^x(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i})dx$$

$$=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x}$$

令 $x=1$ 则得 $\arctan 1=\pi/4$，但这时上式中有 $\frac{1}{2i}\ln\frac{i-1}{i+1}=\frac{1}{4i}\ln(\frac{i-1}{i+1})^2=\frac{1}{4i}\ln(-1)=\frac{1}{8i}\ln(-1)^2=\frac{1}{8i}\ln 1=0$，这就产生了（前面谈到过的）$\pi/4=0$ 的诡辩．

直至欧拉发现复指函数的周期性 $e^z=e^{z+2k\pi i}$（比如取 $z=0$，即有 $1=e^{2k\pi i}$）后问题的破解才得以突破．

2. 复数的完备性

(1) 复数是完备数系．一方面表现为复数集构成一个域（其中满足四则运算的封闭性）．另一方面所有方程的数值解（不管是代数方程还是超越方程）都在复数域中．再则，好些在实数域内难以解决的问题放到复数域中来即能解决了．比如代数基本定理的证明（n 阶代数方程必有 n 个根，包括重根）要在实数域内

来完成是相当难的，但拿到复数域内来虽然也不容易，但毕竟被高斯证明了.最后指出，在数系理论中的确也证明了作为二元数系的复数系是在数的意义下最大的、最为有意义的数系，此外虽有个四元数系但没有实用意义.虽然还有“超复数系”，但它已经超越了数的意义了.

(2)复数表征了完全运动.由复数的指数形式：

$$z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi} \tag{3-5-2}$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\arccos\frac{x}{r}$，可以看出，它明显地具有线量($r$)和角量($\varphi$)，且皆为变量.这充分表明，复数具有完全运动的特征.再从复数的完备性来看，说“完全运动”仅由平移和旋转构成已的确够完全的了.或从某种意义来说，完全运动与复数域是具有等价性的.这也是对运动理论的一种深刻揭示.

3. 复数的周期性

结合式(3-5-1)和(3-5-2)知，由于 $\cos\varphi$ 与 $\sin\varphi$ 皆同一周期，所以 $e^{\mathrm{i}\varphi}$ 是周期函数，因此当式(3-5-2)中仅 φ 变时复数 z 即作严格的周期变动.但因复数是二元数，有两个独立变量(x，y，或 r，φ)比如若 r 和 φ 同时变时，z 的周期特征就显得复杂了，这时它可能作螺旋式的而不是圆周式的变动，这就不是严格的周期运动了，但也有一定的周期特征，所以叫它做具有“周期性”.

的确，下面也将看到，在复数或说复变数、复变函数的意义下，有着丰富的数学理论，其中也充满了周期性.

3.6 周期的机理探讨(Ⅱ)

本节讨论两类周期性问题.一类是在函数方程解的探索中表现出的对周期、周期性的研究.另一类是复数及以复数为背景的数学理论中的周期性讨论.

3.6.1 函数方程解理论中的周期函数问题

以函数作为解的方程都是函数方程,主要的是微分方程,这里仅就常微分方程来讲.

我们学过常微分方程,也知道一切方程的根本问题就是求解,同时知道,常微分方程解都是一元函数,因此都是(自变量,因变量)坐标平面上的函数曲线.但也须知道,一般的常微分方程却是不容易直接求出解式来的.比如即使一个基本而简单的力学方程,也并不是随时都可以表出显式解来的.

$$\ddot{x}+a(x)\dot{x}+bx=p \tag{3-6-1}$$

其中 p 表受迫或控制抑或干扰项,左端第一项为加速度,第二项表阻尼($a(x)$ 为阻尼系数,可为常数),第三项是内应力.

由此可见,对于一般的常微分方程,必需或不得不做它的解的理论分析,这就叫做微分方程解的定性分析,或叫常微分方程定性理论.

常微分方程定性理论是个分支学科,不可能全面介绍,这里仅简列一下用“定性理论”探寻方程解的几种主要方式.

(1)拿到方程后首先(直观)判定是否可解(又叫可积),即是否可作出解的显式表出.实际上如果有显式解,往往是周期函数解.若不行则根据前述理论对其作如下定性分析.

(2)探寻其是否有拟周期.

(3)探寻其是否有概周期.

(4)探寻其是否有点周期.

(5)若严格的点周期不成,则退而寻找广义的点周期.比如这时只要能判定其解曲线有界,且具有与自变量(或时间)坐标轴有任意多的交点即是解的很好的信息了.

当然,关于解的理论,还有一种现在较少使用的所谓"解析理论"方法,其特点是充分利用微积分理论和级数理论,这里免叙.

此外,如果该微分方程满足如下"动力系统"条件,一般说以用动力系统方法作解的定性分析更为有力.

3.6.2　动力系统轨道分析中的周期性

动力系统论是现代数学中一门很热的学科,内容丰富颇具前沿性,比如系统科学中有名的系统论分支所获得的丰富成果即充分体现为动力系统论的威力.这里仅围绕本节任务作一些简要叙述,读者只需了解个大概即可.

动力系统是其**系数皆为常数**的微分系统,又分作离散动力系统与连续动力系统两大分支,本节说的即属连续动力系统.

总体说来,动力系统论的任务就是在所谓"**相空间**"中探寻其解的定性特征.

由于连续动力系统理论就是常系数常微分方程定性理论，它与上段不同的仅在于这里是在其“相空间”中求解（这时又叫做轨线），出于求解的困难性，仍只能作定性探讨.

同样的，在探讨连续动力系统轨线的定性特征时，其“周期性”信息仍然是首要的求索目标. 归结起来可有如下几点：

1. 可积类型

亦即可以表出显式解来的类型. 已谈到，可积系统的积分曲线族往往是一些封闭曲线族，其中封闭曲线都叫做周期轨. 举个简单例子：

$$\dot{x} = a_1 y$$

$$\dot{y} = b_1 x + b_2$$

上下式相约得$\frac{dx}{dy}=\frac{a_1 y}{b_1 x+b_2}$，分离变量后积分可得$\frac{b_1}{2}x^2+b_2 x=\frac{a_1}{2}y^2+c$，$c$ 为积分常数，可配方整理成$\bar{b}_1(x+e)^2-\bar{a}_1 y^2=\bar{c}$，其中$\bar{b}_1=\frac{b_1}{2}$，$\bar{a}_1=\frac{a_1}{2}$，$e=\frac{b_2}{2\bar{b}_1}$，$\bar{c}=\frac{b_2^2}{4\bar{b}_1{}^2}+c$，当参数中除了让 $\bar{a}_1$ 小于 0 外其他皆大于 0 时，则如图 3－3 其轨线族是绕中心$(-e,0)$的一族椭圆. 但当参数皆大于 0 时则如图 3－4，是一族双曲线. 似乎这时不是封闭曲线族了，是吗？否. 其实站在无穷远点来看，它们仍然是一族族封闭曲线族，或说它们是交于无穷远点的积分曲线族（注意到现代数学把“不存在”的无穷远作为一个“点”来处理是符合逻辑的）.

2. 不可积类型

常微分方程中存在可积类型与不可积类型是被“黎卡提方

程”等反例证实了的，但一般方程要判定其是否可积却是困难的. 好在一个方程不管它可积与否都可以用定性分析法去研究，所以在实用上常常是对于直观上不可或不便用显式表出解来的方程，都可以视为“不可积”类型而采用定性分析法. 这里主要强调两种具有周期特征的成果类型.

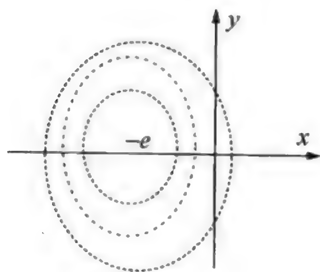


图 3－3

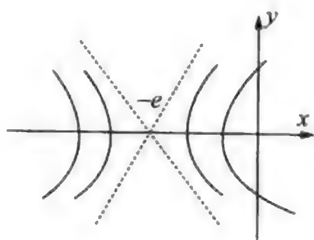


图 3－4

(1) 振动轨及其周期性. 如图 3－5，围绕“奇点”m 的螺旋曲线型轨线叫做具有振动性的轨线. 显然这种振动性就是一定的周期性特征体现. 在动力系统理论中 m 点叫做焦点型奇点. 围绕焦点的轨线可能趋向 m 点或远离 m 点，相应地 m 点叫做稳定焦点或不稳定焦点.

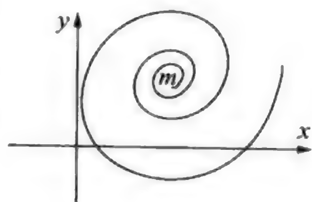


图 3－5

(2) 奇点集等特殊点集的研究. 出于动力系统的优越性质，对动力系统的研究不仅集中在对其“相空间”的研究上，而且在相空间上又只需集中到一些特殊点的或点集的研究上. 只要把这些特殊点集弄清楚了其轨道族的定性走势便迎刃而解了.

关于这些特殊点集的研究首要的是所谓“奇点集”，又叫不

动点集(记为 F),基本的有焦点、结点、鞍点、中心等四类. 其实奇点的“点”也都是系统的解,且是其常数解投影到相空间来的表现. 动力系统理论已有一整套求出奇点、判定奇点类型的方法.

其次即是真正的周期点集(记为 P),比如周期轨本身即是一个周期点(子)集,所以这里周期点集也包括所有周期轨中的点(子)集. 而周期轨既包括围绕中心的闭曲线族也包括其他情形下的比如“极限环”等所谓孤立闭轨.

显然,上述奇点集是周期点集的一种特殊情形(如下诸集则是周期点集的种种推广情形).

再则是所谓回复点集(记为 R),简单说回复点的概念类似于“概周期”点的概念,但这是在相空间来说的,判定方法也不同.

此外即是所谓非游荡集(记为 Ω),它有些类似于点周期概念与概周期概念(见 3.4.2 节)的综合思想,这里免述.

把所有 F、P、R、Ω 等,统一叫做“类周期点集”. 它们间有如下包含关系:

$$F \subset P \subset R \subset \Omega \subset \cdots$$

3.6.3 傅立叶级数与周期函数

我们知道一般函数作傅立叶级数(又叫三角级数)展开的条件是十分弱的,只要逐段可微即充分了. 因此说一般的在任意有限区间(比如$[-l,l]$)上逐段可微的函数 $f(x)$ 皆可展成傅立叶级数,其一般形式如

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots \quad (3\text{-}6\text{-}2)$$

其中 l 可以任意大.

可见,傅立叶级数各项皆周期函数(当然其总体不一定是周期的),可见在无穷的意义下,一般函数皆能与周期函数发生密切关系,或说在无穷意义下一般函数皆可表作周期函数的迭加.

特别地,再据欧拉公式可见,一般函数也与复数或说复指数函数有着密切关系,这就是与傅立叶变换和傅立叶积分公式的关系. 比如相应于式(3-6-2)且在 $l\to\infty$ 之下(注意到这时 $\frac{n\pi}{l}$ 记为 $\omega_n\to\mathrm{d}\omega$)都有其傅立叶积分和傅立叶变换

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \quad (傅立叶积分)$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \quad (傅立叶变换) \quad (3\text{-}6\text{-}3)$$

由此说明了周期性特征在一般函数分析中分布之广泛性,也说明了作任何函数的分析都有可能从其周期性特征探索上去得到点什么信息.

3.6.4 调和分析

由式(3-6-3)看到,傅立叶级数经由复指数形式表出后,变成了具有所谓"时-频"两个变量的东西了,这就为分析大大开阔

了空间领地. 诸如调和分析、频谱分析等就是在这种背景下应运而生的. 这些理论在诸如微分方程解理论、函数空间理论以及数据处理、数值计算等方面都是它们重要的基础理论.

调和分析是基于傅立叶变换和傅立叶积分形式对函数空间作深层次发掘的现代数学分支. 它利用"时-频"特征将建立在实轴上的一般的一元函数 $f(x)$ 表作如下形式来研究别有洞天.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,d\alpha(t) \tag{3-6-4}$$

其中 e^{itx} $(=\cos tx+i\sin tx)$ 是复域上的简谐振动,又称调和振动因子,这也是调和分析得名之由来. $d\alpha(t)$ 表示 $f(x)$ 在 t 处含 e^{itx} 的份额大小,叫它做"权函数".

注意到从概念上讲,调和分析与调和函数是不同的(尽管它们间也具有深层次上的联系). 调和函数系指满足拉普拉斯方程 $\Delta u(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2}=0$ 的二阶连续可导函数 $u(x)$.

调和函数论的应用也很广,应用界能看到的有如函数变换等,诸如褶积变换、拉普拉斯变换及其离散化形式" z 变换"等.

调和分析在当前热门的应用方向是小波分析(见 3.6.5 节).

3.6.5 小波分析

小波分析是近十年来才开始风靡世界的一门应用数学分支. 小波分析是以调和分析为基础,从时-频出发,针对应用需求,对应用模型(函数)的傅立叶级数、傅立叶积分式作出一种创造性构造,所产生的理论和应用方法.

小波分析的根本特点(也是理论困难之点)即是"小波". 它

是将三角级数或傅氏积分 /傅氏变换中无穷多个建立在全实轴上的周期函数的叠加，转换成新创的、符合严格条件的一个个构建于局部(甚至可以很小)区间的"基波"周期的无穷叠加. 在这些"基波"上能实现对时-频的伸缩 /平移等可调、可控功能.

小波思想系 1909 年首次由 Harr 提出，近百年来经几代学者的努力先后获得多次突破之后，终于在 20 世纪 80 年代进展到了可应用的阶段. 因而掀起了如今的小波分析热.

"小波"又被叫做是一种"显微镜"，它可以用于各类电气工程、技术及其理论分析. 显然在现代科学技术中的地位是不可估量的.

如今小波分析的应用软件已有不少种类.

关于小波分析的理论和应用，这里仅点到为止.

3.7　周期的力学简谈

从上述过程已能感觉到了，周期数学与物理学的关系是特别密切的，比如物理学中弹性、振动、波、信息等理论和应用都是十分丰富的，它们也都直接属于周期理论的应用范畴. 这里仅简单谈谈振动与波动.

3.7.1　振动与周期

1. 关于振动直观说来，振动是具有弹性的物体在受到瞬时作用力(冲击)产生形变后，其弹性恢复势所引起的物体局部的一种往复式运动现象.

没有弹性产生不了振动;没有冲击力也产生不了振动.

出于振动中的多种阻尼和振动能量的外传原理,当作用力不超过其“限度”时,其振动将逐步收敛到平衡态.反之,仅当作用力超限或持续作用力产生积累才可能使振动发散甚至使系统受到破坏.

如今振动概念已大为推广,除了经典的丰富而复杂的机械振动外,还有自然振动、电磁振动(或振荡)和非物质振动等.自然振动如天体运动的“振动轨”,量子世界基本粒子的运动态和地震、摇动(如风树的摇动)等.对于自然振动需要去认识它、防避它、利用它,但至少目前还说不上实质性地改造它(比如“5·12”汶川大地震居然连现代设备也未能预测到它).

电磁振动即电磁振荡,这是现代社会不可须臾或缺的,没有它就没有了广播、电视乃至航天通讯等,甚至连发电机也工作不起来了.可见电磁振荡(从而其理论和技术)之基本性和重要性了.

自然振动和电磁振动都属于物质振动,此外还有个物质振动概念的推广——非物质振动.

非物质振动即非物质对象的“振动”现象.诸如人们常说的一个新闻震动了社会,宏观经济的周期振动,市场上的弹性振动,股市上各种指数的上下振动乃至生活中的振奋、振兴、振作等词语不可谓不是十分常用的.也许会认为这些不过是形容或比喻之类的文学修辞罢了.当然我们相信这些带“振”(或震)字的词语产生于现代科学之前,因此说它们在创生之初仅仅作为形容、比喻、修辞,那是可信的.但在今天,在现代科学的今天,这

些词语的性质也变了，从虚词变成实词了.

比如十年前，笔者曾在一个课题研究中，就某食品市场上相互“替代”性较强的四种商品作了个振动性讨论. 首先观察到并描述了当其中一种商品受到一次需求“冲击”后，通过市场的价格机制，商品间替代性和消费者的理性选择所产生的市场“振动”特征，并能最后化归为一个典型的式(3-6-1)型力学方程(由于它超出了本书宗旨，这里就不细述了，有兴趣者可参见《应用数学与力学》，1997 年 12 期). 由此说明，市场上或一般的社会上的“振动”与物质的振动实质上是等价的.

又如，不久前本人见到一位要好的年轻同事(W)若有所思的样子，问他时才强作不经意地说“刚接到一个短信，说是恭喜我的手机号码中了个二等奖，四万元呐，要我打电话告诉他身份证号码并为办理有关手续作一些信息认证……”，最后又言不由衷地补上一句“这些都是假的”. 顷刻后他又细声细语地说，“不过也可以去个电话问问，看看它究竟玩的什么花招”. 可是刚要拨号时又立即收起来了“算了算了，连这个话费也不给它了”.

不难看出，这个短信一开始是对 W 产生了冲击作用的，而且也有过刹那惊喜. 从而在他脑子里引起了振动，只是由于这类短信骗局早已不是新鲜事了，所以他的理智对振动尚能产生较大阻尼，使其最终没有上当. 但毕竟人的精神是由理性和非理性“二象”构成的，尤其在这样的“喜”事面前“二象”间是会产生矛盾和斗争的，虽然最终是理性占了上风，使得振动得以收敛到原状，未造成损失，但毕竟经历了一个振动(思想斗争)过程.

显然，这一振动过程完全可以用数学语言描述出来，而且相

信它就是一类典型的动力学方程.

2. 振动的周期性

总的说来,振动与周期的关系是十分密切的,具体说来却是较为复杂的,类型比较多. 大体上说可分作三种类型:等幅振动、收敛型(阻尼)振动和发散型振动.

等幅振动,当其自变量单调改变时便是周期振动,因为等幅振动的幅(或叫模)未变,在周期的两个"等量不变"条件中只满足了一半. 不过其角度(自变量)的单调增加常常是容易满足的.

收敛型振动即其振幅随着时间的增加而递减的振动. 它的角度虽然还是按周期在等量递增,但其函数值却不能重复出现,不合周期函数定义了.

发散型振动的周期性特征与收敛型的呈对偶状态,意即发散型的振幅是逐步增加的,但角度却是等量递增的. 因此尽管它也具有周期性但仍不是周期函数.

3.7.2 关于波动

波动简称"波".

皆知,波与振动是密不可分的,可以说没有振动就没有波,它们似乎是母子关系.

那么是否可说波的理论是包含在振动理论中的呢?

这也不是. 一方面可以说波和波动理论比起振动理论来更为丰富,其缘由之一就在于波还与能量息息相关. 波是能量的传播. 另一方面,可以说振动是由力引起的,波则是由能量引起的. 再则,振动理论的数学工具主要是常微分方程,波动理论的数学

工具主要是偏微分方程. 因此不难承认，波与振动还是有着质的区别的.

为了讨论波，不妨先谈谈能量.

1. 能量一瞥

经典说法，能量是一种物质；现代观点，物质都是能量. 那么根据“$a \subset b, b \subset a \Rightarrow a = b$”的原理，似乎“物质＝能量”了，是吗？不过现在也有一种观点认为整个客观世界，包括物质的、社会的和精神的都是由能量构成的（见《大自然复杂性原理》，科学出版社，2004 年）. 万紫千姹的（包括虚的“事”、实的“物”）客观世界只不过是能量的不同表现形式罢了.

如果仍然按经典物理学把能量分作势能和动能两大类，则据势能的静态特征和动能的动态特征可把能量也归为静态和动态两种状态. 这时由爱因斯坦方程 $E = mc^2$（E 为能量；m 为质量；c 为光速）决定的物质能可归于势能. 势能处于相对静止或平衡状态. 动能则是能量（物质）运动或流动、转换时迭加在物质上的一种能量.

这是因为当势能改变时必然伴以某种运动形式，其势能可能增加或减少，假设为减少，这时减少的势能将变成其环境物质或阻尼物质的动能，环境物质的动能又变成它的环境物质的动能，如此下去，这样的过程叫做能量的传递. 随着人类利用能量传递的目标、任务不同，又有叫做传输、传播、传导、传承什么的种种名称.

振动中的能量消减也是一个从势能转变为动能的过程.

能量的传递形式也有多种，其中一个大类就是所谓“波”的

形式.

2. 波动及其周期性

振动的向外扩散即成为“波”.

波,原则上(不考虑能量损耗)能传向任意远,之所以如此,就靠它的周期特征.

正是波的能量传播功能使得振动能得以消解.比如它可以使机械受冲击后的振动得到衰减,可以使地震中心区域受到的破坏减小等.

不敢想象,如果物质失去了波的机制、如果世界上没有了波,那是何等的可怕,又是何等的不方便.因为特别是近现代以来,人类利用波来传播信息的方式和领域已越来越广泛,以至可以说离开了波就没有了我们的现代化了.

波,不管是纵波还是横波,都是以频率(ω)来描述的,而频率则是周期(p)的倒数 $\omega=2\pi/p$,足可见关于波的研究少不了周期函数理论,更是复变函数的领地.此外就是所谓《数学物理方程》了.

3. 关于《数学物理方程》

《数学物理方程》又叫偏微分方程,简称《数理方程》.一般是用“《》”表示书本,却在这里用来表示一门学科,仅以此表明该学科发展较难.首先是它于 20 世纪上半叶才迟迟形成学科.其次是《数理方程》自形成学科以来近一个世纪了,却仍在二阶偏微分方程内摸索.即使在二阶内也还远谈不上成熟.可见函数方程一旦进入多元,其难度的增加是非线性的.

《数理方程》起源于物理学当初对波的传播性能的数学研

究，诸如热的传导、梁（或膜）振动波的传导以及场能的传播等．由于这些波在物理世界有着实实在在的发生，所以在物理学上对波的数学描述最早即以它们为背景．

首先，它们都是物理空间（$\mathbf{R}^3$）加上个时间维（即 $\mathbf{R}^3\times T$）共 4 维空间"上"的问题，是建立在 $\mathbf{R}^3\times T$ 上的函数，因此必是一些多元函数的数学问题．

其次，由于是"多元"且是在"运动"，所以它们的数学模型都是一些"偏微分方程"，同时还是二阶的（这与二阶导数代表加速度这点存在着内在关系）．因此其解函数也只能是多元函数，不再像常微分方程那样，不管多少阶方程，其解只能是一元函数的了．

现将《数理方程》中典型的三类方程罗列于下，以作观赏：

①热传导方程，又叫抛物型方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z) \qquad (3\text{-}7\text{-}1)$$

其中 F 为控制项．

②波动方程，又叫双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z) \qquad (3\text{-}7\text{-}2)$$

波动方程有多种情形，这里是代表性的一类．

③调和方程，又叫椭圆方程

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\text{（拉普拉斯调和方程）} \qquad (3\text{-}7\text{-}3)$$

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=F(x,y,z)\text{（泊松调和方程）} \qquad (3\text{-}7\text{-}4)$$

最后看到，式(3-7-1)至(3-7-4)中并没有周期函数或复数、复变函数，是否这里对波的研究不涉及周期性？我们说不是的，原来这些数理方程的解将深刻而广泛地涉及并运用到无穷级数包括傅立叶级数和傅立叶积分、傅立叶变换等.

至此可见，周期的存在的确普遍，周期的研究的确深刻，周期函数的研究和应用同样普遍和深刻，但出于本章的科普任务和篇幅所限，好些地方只能点到为止. 好在我们的目标不是介绍这些知识本身，仅是借此启发我们的思维，点燃我们的兴趣，从而以自觉的积极性主动去参看有关专门书籍，但愿我们这一目标在读者身上能见到成效.

赏析四
高等数学中若干基本问题赏析

鉴于读者是念过大学的,高等数学对他们还不生疏,本章4.2~4.11节即从高等数学内容去为他们提供一组套餐.亦即本章将直接针对高等数学中一些具体问题来写出,因此它的风格与前面各章有些不同,即使各节间的风格也有些不同,在深浅上也会有些差异.将其汇集到这里来是为了给不同兴趣的读者提供一些选择的余地,也算是一个新的赏析场所吧.

各节间具有相对独立性,便于作套餐式选择.对于认为较深的节次可以粗略看看,了解一下思想即可.相信数学爱好者们对这些内容是另有一番兴趣的.

4.1 什么是高等数学

什么是高等数学呢？能不能把那个用了一百多个学时、学了一个学年才学完的厚厚两本教材端出来说，这就是高等数学呢？显然不能，原因不在别的，就在于这里没有思想上的深化，因而这种回答是没有意义的.

有人说高等数学就是微积分方法，这也算是过得去的一种说法. 或说这种说法虽不错，但嫌思想深度不够，显得不够本质.

那么，一种更为本质而鲜明的说法则是：高等数学是无穷（也叫无限）的数学（这里从又一角度再次谈到无穷）.

是的，高等数学是无穷的数学. 在高等数学中离开了无穷，好多内容是无法讲述的. 比如说，如果没有无穷概念那是难以理解极限概念的，甚至说是建立不起极限概念来从而也建立不起极限理论来的. 若这样，微积分方法也只得回到19世纪下半叶以前那整整两百年的争论状态中去了.

因为正是极限论的诞生才斩断了历时两百年旷日持久的争论啊.

进一步说，如果没有无穷概念，即使微积分基本方法也是建立不起来的. 因为都知道，定积分是个无穷项求和式的极限；微分是自变量的无穷小增量与因变量相应增量之比的极限.

此外，即使用非标准分析方法来建立微积分学一样回避不了无穷.

在高等数学中具体的无穷概念不少，诸如（正、负）无穷大、

(正、负)无穷小、无穷数列、无穷级数、无穷逼近、无穷振动、无穷远点等,至于用到无穷概念的地方更可谓比比皆是了.

甚至好些看似无关的对象在无穷意义下常常能被联系起来. 比如正是无穷(级数)使得欧拉公式得到证明;正是无穷(级数)使得一般函数能作代数的实现(泰勒级数)或表成周期函数的递加形式(傅立叶级数).

但是,我们也不能忘记,"无穷大量是不存在的". 这是在初等数学中即已耳熟能详的知识了,在高等数学中一样是这样强调的. 那么它与上述意义是否有矛盾呢?

这是并不矛盾的. 那是因为"无穷不是数,无穷只是一种状态",过去所说无穷不存在,实际上是从有限量的角度来说的,而以上所说无穷则是在无限(状态)和无限量意义下来说的.

其中"无限状态"就是极限意义;"无限量"就是极限值的意义.

比如以无穷大来说,所谓"无穷大(记为∞)"即是一种状态,其反演($1/\infty$)就是无穷小状态. 而说无穷远点则是指其极限值的无穷大(注意到数量的无穷大与几何的无穷远是等价的),本来作为通常的值它是不存在的,但一方面这里是取极限的结果,可以是不同于一般有限值的. 另一方面由于它的反演($1/\infty$)的极限(0)是确定的,也可以说明把无穷远点作为一个量来看待是合理的. 再则,在现代数学中正式把无穷远点作为一个量来对待,不管在理论上还是应用上都是合逻辑的,且也没有发现过矛盾. 足见把 0 的反演($1/0=\infty$)作为无穷大(∞)的极限叫做无穷远点是合理的(注意:0 不是无穷小,只是无穷小的极限值).

总之，我们看到了，过去在有限量意义下强调无穷大不存在是正确的，现在在极限意义下说有个无穷远点（无穷大值）也是合理的，这是在过去基础上的进步而不是对过去知识的否定.

综上所述，高等数学是无穷的数学，没有无穷概念就没有高等数学. 在有限量的意义下，无穷不存在，但在极限的意义下，无穷远点是合乎逻辑的.

4.2 关于极限定义的进一步认识

4.1 节中谈到，是极限概念及其理论斩断了或说结束了微积分学旷日持久的争论.

不仅如此，也是极限理论奠定了微积分学的基础，还是它为分析学（又叫数学分析）的爆炸性发展提供了理论基础. 极限论也成了催生现代数学诞生的三大标志之一（另外两个标志是非欧几何学的诞生和近世代数的诞生）.

正是出于极限论的上述光辉业绩，百多年来在人们心目中似乎觉得极限论不只是微积分理论的基础，已经十分深刻，十分完美了.

不过这里却要指出，在今天看来极限论的意义是很有限的，只能说它是较为圆满地完成了建立微积分学基础的任务，同时在认识无穷大、无穷小上也起到了一定的基础性作用.

极限论诞生百多年来的实践也表明，它在整个分析学中特别是作为微积分方法的理论基础，基本上没有发生过大的矛盾，基本上经受住了历史的考验.

不过，也是历史的检验使我们今天终于能够认识到，极限论仅仅是为分析学提供了基础，并没有解决更深层次的更多问题．比如极限论只是在分析学的层次上认识了无穷大、无穷小，却并没有解决实数集中无穷大、无穷小的“结构”这一深层次上的本质问题．

换句话说，在实轴的微观结构问题上，极限论是无能为力的，正是在这里表现出了它的局限性．

当然，反过来说，当初极限论的建立并不是为着“揭示实轴结构”这一任务来的．甚至当时还未提出“实轴结构”这样深层次的问题来呢．

也就是说，若要站在当初整个科学和数学的认识水平上，会认为极限论已经十分深刻，似乎已深着“洋底”——揭示出数学的根本问题了．

不过在现代，如果还这样认为的话那就是落后的了．

换句话说，在今天看来极限论是有其局限性的，远未回答出数学的根本问题，这才是正常．本节的任务即在歌颂极限论的同时也指出极限论的局限性．（只是出于本书的性质，不能说得太深）

由于极限理论是由极限定义（公理性定义）决定的，这里即着重就极限的定义来做讨论．

首先看到，例如“函数 $f(x)$ 在 $x_0\in D(f)$ 处连续”的极限式定义是：

对于 $f(x)$，在 $x_0\in D(f)$ 处，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $|x-x_0|<\delta$ 时必 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则叫做当 x 趋于 x_0 时

$f(x)$有极限值$f(x_0)$，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，这时叫$f(x)$在$x_0$处连续.

显然，这一定义来的十分严格、清爽、干净、利落，更在于这一定义能使得极限运算，从而微积分运算"算术化"（见赏析一中第九则、第十则运算），这是一大优点. 但是极限定义的逻辑格式要求，需要事先知道或猜出极限值来，或说极限定义只能用于检验极限值而不可能根据极限定义直接求得极限值. 即使对于"哥西序列"也只能根据极限定义去判定它是否有极限，而不是直接求得极限. 这至少在技术上是一个遗憾之处.

那么，可不可以另外给出一个极限定义，使之能直接得到序列的极限呢？这也许是历代数学家共同的愿望. 但在现代，特别在考察了"公理集合论"之后使我们不能不承认，比如要能在实轴上由任意一个无穷序列直接获得极限，都是十分困难的. 或者说如果没有超越于现代水平的新概念或新理论支撑，要直接获得极限是不可能的. 例如在$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}=\infty$过程中，要想在现有知识基础上去实现让$x$"逐步"地（比如按"分杵原则"）最终是连续地达到$x_0$，那是不可能的（从深层次意义上讲，它实质上是"跳"过去的）. 它与$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$中，要求$n$真正达到$\infty$，具有同一实质的困难.

实际上这样两个问题与诸如"对任一实数，找出与之最相邻的一个实数来"的问题具有同质的难度. 这一难度正是当今"数学寻根"（起自20世纪初）这一典型的基础数学、数理逻辑前沿

共同的遭遇.

此外,今天回忆起来,其实在数学分析的发展过程中还是遇到过向极限论挑战问题的,只是当初只把它理解(说成)为数学的"玄妙"而未能正面意识到这是对极限论的挑战,是极限论在数学深层次上表现出的不足罢了.

比如典型的有所谓"点点连续,点点不可导函数"现象、"皮亚诺曲线"现象等实例.

所谓"点点连续,点点不可导函数",系外尔萨斯(K. T. Weierstrass,德,1815—1897)于1874年给出的一个人为构造的反例,形如 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n\pi x)$,其意义之大,使得后人把外尔萨斯奉为"现代分析之父". 由于其证明较繁,且不直观,后为范·德·瓦尔登作了改进,其改进思想是变曲线 cos(*)为折线.

至今可说"点点连续,点点不可导"已发展成一类函数例,不过都是些人为的例子罢了(本节也得到一个简单例,见例1).

"点点连续,点点不可导"函数类一个共通特点是皆以无穷形式(级数或序列)来表出. 比如一个直观形式是其各项皆为折线函数且要求各项的折线边长或夹角作序列地改变,因而所有项的折线顶点(显然是不可导点)投影到实轴上来不会产生重叠,这一来折线(不可导的)顶点集在实轴上的投影集(记为 Ω)成为一个稠密集,其上的点都是聚点(自然,该函数在 Ω 以及整个实轴上都点点连续). 特别地,对于实轴上任一点($x\in\mathbf{R}$)皆有来自 Ω 的序列(记为 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\Omega$)收敛于 x,由于在($\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$上)

收敛的过程中始终保持不可导,极限论表明它在 x 点也不可导.从而该函数在整个实轴上点点皆不可导.

这就是"点点连续,点点不可导函数"的基本思路.

所谓"皮亚诺曲线"是 1890 年皮亚诺(G. Peano,意,1858—1932)在推广所谓"康托曲线"思想基础上给出的一个序列映射曲线的极限曲线.其基本特征是将一个有限的低维空间单位连续地映射成(填满)一个更高维的空间体,叫这样的映射做皮亚诺映射.比如它可以以一个序列步骤将 $[0,1]$ 区间段连续地拉长、折叠后逐步填满一个平方面积 $[0,1]^2$,甚至可以填满一个任意有限(n)维立方体 $[a,b]^n$,$a,b\in \mathbf{R}$,令人匪夷所思.

"皮亚诺曲线"的证明思想是,对于 $[0,1]^2$ 上任一点 x,皆存在一个 n 使得映成的第 n 步皮亚诺曲线(将 $[0,1]$ 映入 $[0,1]^2$ 的曲线(实为折线))通过该点 x.

例 1 (一点准备:本例涉及两个较新概念,兹作一简单介绍.①"康托三分集",系康托(Cantor,德,1845—1918)首先研究的一种映射,将一个单位线段三等分后去掉中间段,再对剩下两段分别三等分后再去掉中间段,如此下去即得康托三分集;②"分数维空间(简称分形)"系芒德布罗(B. Mandelbrot,法)于 20 世纪 70 年代提出的,由一个设定的"生成子"按一个设定的程序迭代生成的空间图形理论.它可能产生所谓"分数维"空间,比如在本例的映射 $\varphi:[a,b]\to[a,b]^r$ 中即有 $r\approx 1.261\ 86$,满足 $3^r=4$,叫这里 $[a,b]^r$ 是 r 维的分数维空间.对上述概念若还有读者不够理解,请不必着急,只需了解其思想作个欣赏就行了,借此开开眼界也好.)现叙述本例.

已知$\overline{ab}=[a,b]$，作分数维曲线映射 $\varphi:[a,b]\to[a,b]^r$，其基本步骤如下：

$$\varphi_0:\overline{ab}\to\overline{ab}$$

$$\varphi_1:\overline{ab}\to aa_1b$$

$$\varphi_2:aa_1b\to aa_2a_1a_3b$$

$$\cdots$$

它们满足：(Ⅰ)如图 4-1 所示，新折线系以原象各边为底作等腰三角形，底角(α)保持为小于 $\pi/4$ 的常角，并依次连接各顶点而成.

(Ⅱ)φ_n 建立在 φ_{n-1} 上的各等腰三角形皆有一腰在 φ_{n-2} 上.

(Ⅲ)每级折线的各边长皆相等.

(Ⅳ)φ_n 中各边在 φ_{n+2} 上即变得只剩下"康托三分段"去掉了中段后的两段.

由此所得序列$\{\varphi_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_\infty=\varphi_\infty(\overline{ab})\triangleq\varphi(x)$.

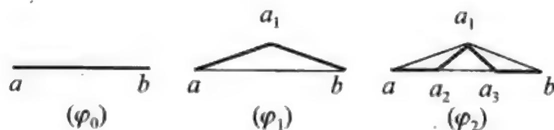


图 4-1

为给出相应表达式，比如可设 $\alpha=30^\circ$，$\varphi_0=\overline{ab}=[-1,1]$，则这时有

$$\varphi_1(x)=\frac{(-1)^{[x]}-x}{\cos 30^\circ}=\frac{2}{\sqrt{3}}[(-1)^{[x]}-x]$$

其中，$x\in[-1,1]$，$[x]=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$

$$\varphi_2(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}[\frac{1}{\sqrt{3}}(-1)^{[x]}-x],x\in\varphi_1(x)\text{的值域}$$

…

$\varphi_n(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}[\frac{1}{3^{(n-1)/2}}(-1)^{[x]}-x],x\in\varphi_{n-1}$ 的值域(即 φ_n 是以 φ_{n-1} 的 2^{n-1} 条边为底建起来的等腰三角形的顶点的连线),$n=0,1,2,\cdots$

从而有:(1) $\{\varphi_n\}_1^\infty$ 的一切顶点集(即 φ_∞ 的顶点集)是个二维平面上的康托三分集.且可看到它在$\overline{ab}$,$\overline{aa_1}$,$\overline{a_1b}$等边上皆构成一维空间上的康托三分集.

(2) φ_∞(即 $\varphi(x)$)是连续的无穷边折线.

(3)在 $\varphi(x)$上所有点皆不存在切线.

因为这时任取 φ_∞ 上一点皆可确定一个 N,使得 φ_N 以此点为其一个顶点,此即点点皆折线的顶点.所以 $\varphi(x)=\overset{\infty}{\underset{n=0}{o}}\varphi_n(x)=\varphi_\infty(x)$即为$\overline{ab}=[-1,1]$上点点连续而点点不可导的函数,其中 $\overset{\infty}{\underset{n=0}{o}}$ 表复合映射.例 1 讨论毕.

回到主题,我们看到了极限论的诞生在 19 世纪后半叶是显赫一时的,一度被认为是数学中十分本质的一套理论,以至人们对它的信任延续到今天,都还鲜有正式文献指出它在历史进程中显现出来的局限性,尽管早已有了上述皮亚诺曲线之类系列反例的挑战和研究实数结构的“公理集合论”产生的挑战,但人们仍一直保持着沉默,这是可以理解的心情.

本节是要指出:

(1)极限论的功绩是不可否认的.它永远都是微积分学的基

础. 但也仅仅是微积分学的基础.

(2)极限论的弱点仅仅是在前进了的历史任务(认识连续统结构)中比较起来说的,并非极限论在当初完成其原始任务时有什么先天错误.

(3)当初认为它是数学的顶峰、是完美的、没有局限性的,都很正常,是可以理解的.

(4)这里仅仅是想将上述事实指出来,呼吁后来者不要无意识地继续沉浸在历史当初对极限论的心理状态,否则是不利于发展的.

(5)相信这一澄清历史事实的举动是无损于极限论本身光辉形象的.

4.3　在极限运算中何时可作等价替换

在高等数学中讲无穷小的概念时,曾引入一个“等价无穷小”概念,即若两个无穷小量的比的极限为 1 时,叫它们做“等价无穷小”(记为～),并可能在极限运算中作相互替换,从而产生了极限运算中的一个“等价替换”方法.

但是我们也知道,这里的“替换”是存在局限性的,即有时可以作替换,有时则不可以,那么这是为什么呢? 何时才能替换,何时不能呢? 这是一般课本中没有正面回答的. 本节即来讨论这一问题.

首先看几个例子.

例 1　由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\dfrac{\tan 2x}{2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{2x}=2$,同

时有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}2=2$，所以有 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}$，亦即这时两个等价无穷小 $\tan 2x$ 与 $2x$（因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}=1$）是可以相互替换的.

例 2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1/n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n(n+1)}=1$，但若将其中的无穷小量 $\frac{1}{n+1}$ 替换为无穷小量 $\frac{1}{n}$ 即是错误的，因为这时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{1/n^2}=0.$$

由此可能使我们产生猜测：也许在具有加减乘除（四则）结构的极限式中一般都可以作等价替换，只要在加减式中对无穷小（大）项作替换时不要产生相同项的抵消就可以了.

对此也有反例：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{(e^x-1)(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{(e^x-1)(1-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{e^x(1-\cos x)+\sin x(e^x-1)}=-\frac{1}{3}$$

其中，用到了无穷小量 $\tan x$ 与 x 间的等价替换和洛必塔法则. 显然这时的无穷小量 $\tan x$ 与 x 间是不能抵消的，因此它们间所作的替换不属上述猜测情形，但它们同样是不能替换的. 因为正确答案是“-1”，但洛必塔法则的运用也是正确的（洛必塔法则见下节），所以只能是替换的错误了.

事实上，为回答一般的“等价替换”问题，我们有定理：

(1) 设 $F(x)=F\{f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x)\}$，$F$ 表示 k 个初等函数(f_i)构成的一个(仍然是)初等函数；

(2) 在极限式 $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}F\{f_1(x),\cdots,f_k(x)\}$ 中有等价无穷小 $f_i(x)\sim g_i(x)(x\to a)$.

则当且仅当极限运算中可化为独立求 $\lim\limits_{x\to a}f_i(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_i(x)}{g_i(x)}$ 后再参与运算时，才能代 $f_i(x)$ 以 $g_i(x)$. 其证明较为烦琐，这里免叙(可参见《高等工程教育》1993 年第 2 期，p28—31).

从而可得到**替换判定法**：

在极限式中若有 $f_i(x)\sim g_i(x)$，若想要将 $f_i(x)$ 替换成 $g_i(x)$ 则只要将 $f_i(x)$ 变成 $\dfrac{f_i(x)}{g_i(x)}g_i(x)$，再对极限式正常求极限即可.

例 3　对上述各例皆可用此"替换判定法"去判定是否可替换. 比如对例 1，这时有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$，正确. 但在例 2 中有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\cdot\frac{1/(n+1)}{1/n}}{1/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1/(n+1)}{1/n}}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{n}{n+1}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

可见在例 2 中不可以做这一替换.

4.4 关于洛必塔法则的必充性

皆知，在极限运算中洛必塔法则的运用十分简单、方便，而且似乎还用的十分普遍，以至容易使人忘却它仅仅是“充分”的，也就是说洛必塔法则的条件是过强了的，或说还有一些可以用微分法求极限的情形被洛必塔法则的判定条件给排除掉了.

那么，有没有满足“必充”性的洛必塔法则呢？若有，它与只满足“充分”性的洛必塔法则有何比较关系？本节即来讨论这点.

首先回顾一下洛必塔法则本身.

洛必塔法则(定理)：如果函数 $f(x)$，$g(x)$间满足如下关系(ⅰ)至(ⅲ)，则有极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$(或$\infty$).

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$为$\dfrac{0}{0}$(或$\dfrac{\infty}{\infty}$)型，$x\in$邻域 $N(x_0,\delta)\subset(D(f)\cap D(g))$；

(ⅱ) $\forall x\in N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ (空心邻域)，皆存在 $f'(x)$，$g'(x)$ (后者$\neq 0$)；

(ⅲ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$ (或∞).

我们可以用反例证明该定理只充分而不必要，并且指出其非必要性就出在条件(ⅲ).

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin 2x}$.

首先看到这是个 $\frac{0}{0}$ 型待定式,若取 $\delta=\frac{1}{2}$ 则在空心邻域 $N(0,\ \frac{1}{2})-\{0\}$ 上 $(x^2\ \sin\frac{1}{x})'$ 与 $(\sin 2x)'$ 存在,且 $(\sin 2x)'\neq 0$,于是定理的条件(ⅰ)、(ⅱ)满足,但是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin 2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{2\cos 2x}$ 却不存在,所以定理的条件(ⅲ)不满足.然而我们可以不利用洛必塔法则,比如只需利用乘积的极限等于极限的乘积(当分别的极限存在时),即可直接求出极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{(\sin 2x)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

说明该极限存在且为 0 .

由此说明,条件(ⅲ)只充分而不必要.

为什么这时条件(ⅲ)只充分而不必要?原来问题出在定理的证明中(一般教科书上都有,这里免列)有这样的步骤:补充 $f(x)$,$g(x)$ 在 $x=x_0$ 的定义为 $f(x_0)=0$,$g(x_0)=0$ 后,由条件(ⅰ)、(ⅱ)知 $f(x)$,$g(x)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 上满足柯西中值定理,从而有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\xi\in N(x_0,\delta_x) \tag{4-4-1}$$

由于 $x \to x_0$ 必有 $\xi \to x_0$，两端取极限由条件(ⅲ)即有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

可见条件(ⅲ)之所以充分而不必要，全在于推导中

$$\lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

这一步上. 这是因为式(4-4-3)右端存在了左端必然存在，反之左端存在了右端却不一定存在. 进一步看则是 ξ 与 x 的取值范围不同. x 可在整个去心邻域 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 上取值，而 ξ 是依赖于 x 的，因此 ξ 只能在 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 一个子集(记为 W_δ)上取值. 在式(4-4-2)中形式地把"ξ 改成 x"实际上就是让 $W_\delta = N(x_0,\delta)-\{x_0\}$，则当 $[N(x_0,\delta)-\{x_0\}\backslash W_\delta] \neq \varnothing$ 时即会出现问题. 原来对 $\forall \xi \in W_\delta$ 存在 $\lim\limits_{\xi \to x_0} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = k$ 的，现在对 $\forall x \in N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 可能 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ 不存在. 这就是条件(ⅲ)只充分而不必要的关键所在.

为进一步解释这点，可把例 1 中 $\sin 2x$ 换成等价的无穷小 $2x$，对极限形式 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x}$ 分别从解析和几何两个方面予以说明.

首先，从解析角度说，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x}$ 正是函数 $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \sin \dfrac{1}{x}$，$x \neq 0$，$h(0)=0$，在 $x=0$ 处导数的定义式，它可能

存在却不一定等于导函数在 $x=0$ 的极限. 而运用洛必塔法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos\frac{1}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{2}x^2\sin\frac{1}{x})'$$

正是把原来直接求 $h(x)$ 在 $x=0$ 处的导数一事变成了条件更高的求导函数在 $x=0$ 的极限了. 故本来存在极限的未定式,运用了洛必塔法则后可能没有极限了.

其次,从几何角度来看 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{2x}$,这时令 $\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2\sin\frac{1}{x}$,为叙述方便只在 $x=0$ 右邻域讨论. 显然在 $\forall[0,x]\subset[0,\delta]$ 上所有拉格朗日中值点 ξ 的集合之并正是 $\varphi(x)$ 各极值邻域投影到 x 轴所成子集之并. 把满足柯西中值公式 $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 的中值点的集合之并称为 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的柯西中值集合,记为 W_δ;特别当 $g(x)=x$ 时,把满足拉格朗日中值公式 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ 的中值点 ξ 的集合之并称为 $f(x)$ 的拉格朗日中值集合,记为 $W(\delta,f)$. 则对于 $\forall x\in N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 满足 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$ 的 ξ 是 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 的一个子集,记为 δ_x,显然有 $\delta_x\subset W(\delta,f)$,且有 $\bigcup\delta_x=W(\delta,f)$. 同时 $W(\delta,f)\cap W(\delta,g)\subset W_\delta\subset N(x_0,\delta)-\{x_0\}$. 再看 $y=\varphi'(x)$,随 $x\to 0$ 它将变成振幅为1/2的等幅振荡,且易知 $W(\delta,\varphi)$ 正好是 $\varphi'(x)=0$ 各点的邻域,同时易证随着这种极值点越来越靠近原点,其邻域将缩小至 0(因为$\frac{\varphi(x)-0}{x-0}\to 0$),所以对于 $W(\delta,\varphi)$ 中一切收敛于 0 的子

列 $\{\xi_n\}$ 都有 $\varphi'(\xi_n)\to 0$，从而对于 $\xi\in W(\delta,\varphi)$ 有

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi'(\xi)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x}=0$$

最后回到定理原式 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，即不难理解 $\lim\limits_{\xi\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的差异了.

总之，若要硬将 ξ 改成 x 其实质是将 W_δ 扩张成了 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$，这就有可能违背原有结论. 具体说比如在 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$ 中取 $x_k=\dfrac{1}{k\pi}$，$k=1,2,\cdots$，则 $\{x_k\}\not\subset W_\delta$，这时 $\varphi'(x_k)=x_k\sin\dfrac{1}{x_k}-\dfrac{1}{2}\cos x_k\dfrac{1}{x_k}=(-1)^{k+1}\dfrac{1}{2}\to\pm\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x_k\to 0}\dfrac{\varphi'(x_k)}{1}$ 不存在. 但若取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\right\}\subset W_\delta$，$n=0,1,2,\cdots$，则有 $\varphi'(x_n)=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi-\dfrac{1}{2}\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\to 0$，这时 $\lim\limits_{\xi_n=x_n\to 0}\dfrac{\varphi'(\xi_n)}{1}=0$，极限存在.

由此可见把 W_δ 扩张成 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 后，原来有极限的可能变得没有极限了.

至于对 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式的理解，与 $\dfrac{0}{0}$ 型同理. 为此只需证明 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型洛必塔法则同样可以用 $\dfrac{0}{0}$ 型证明方法来证明，从而证明 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型与 $\dfrac{0}{0}$ 型具有相同实质即可. 事实上这时由于 $x\to x_0$ 必有

$f(x),g(x)\to\infty$，$x=x_0$ 是 $f(x),g(x)$ 的渐近线，因此存在 $\delta>0$ 使得 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 上 $f(x)$、$f'(x)$、$g(x)$、$g'(x)$ 皆非 0，亦即在定理条件下对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型有 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{g(x)}/\frac{1}{f(x)}$，此即 $\frac{0}{0}$ 型，且由柯西中值定理有 $\frac{f(x)}{g(x)}=[\frac{1}{g(x)}-0]/[\frac{1}{f(x)}-0]=(\frac{1}{g(x)})'/(\frac{1}{f(x)})'$（在 $x=\xi$ 处求导）$=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}\cdot\frac{f^2(\xi)}{g^2(\xi)}=\frac{f(x)}{g(x)}$，$\xi\in W_\delta$ 或 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f^2(\xi)}{g^2(\xi)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}$.

所以
$$\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\left(\frac{f^2(\xi)}{g^2(\xi)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}\right)\qquad(4\text{-}4\text{-}4)$$

按定理条件（ⅲ）将 $\xi\to x_0$ 改为 $x\to x_0$ 则式(4-4-4)右端成为 $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f^2(x)}{g^2(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)})=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$. 所以 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型具有相同实质，亦即条件（ⅲ）对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型同样充分而不必要.

于是综上述分析，得到了如下必充定理.

必充定理：在条件（ⅰ）、（ⅱ）基础上，将条件（ⅲ）换成如下条件（ⅲ）$'$，设在空心邻域 $N(x_0,\delta)-\{x_0\}$ 上有 $\frac{f}{g}$ 的“中值点集”$W_\delta=\{\xi(x)\}$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\Leftrightarrow\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=k$，$\xi\in W_\delta\subset N(x_0,\delta)-\{x_0\}$.

事实上在式(4-4-1)两端取极限时有 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. 由于 ξ 依赖于 x，且 $x\to x_0$ 时 ξ 仅在 W_δ 上趋于

x_0,因此应当强调式(4-4-2)中 ξ 只有在 x 限制下的 W_δ 上趋于 x_0 时,上述等式才始终成立,此即所求之充要性.

显然,充要定理的一个直接推论是:

$$\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \text{ 不存在} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \text{ 不存在}$$

不过由于充要定理中 W_δ 难求,这就限制了它的适用性,但是它的理论意义是很强的,因为它揭示了 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 仍可能存在的实质.

注:关于洛必塔法则的研究论文直到现代都还不断,这里列举两篇供参考:

(1) Boas. R. P. Counterexamples to L′Hopital′s Rule. Amer. Math. Monthly,1986,93:644 - 645.

(2)Gianluca Gorni. 得到 L′Hopital 法则的几何途径,数学译林,1991(3).

4.5 一元函数泰勒公式一个证明赏析

高等数学中一元函数的泰勒公式(也叫泰勒展开式)的证明历来是个难点. 这里试图从一个新的角度去给出一个证明,为读者提供一个新的赏析思路. 同时,这一证明仅建立在学生刚学过的函数微分定义和拉格朗日中值定理基础上,只需反复使用这样两个依据即可,思路比较简单、清晰,直观明了,易于接受.

这一证明的基本过程可表作如下两个步骤.

步骤一：设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内存在 $f^{(n+1)}(x_0)$，则有初级公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\theta_1\Delta x^2+f'''(x_0)\theta_1\theta_2\Delta x^3$$

$$+\cdots+f^{(n)}(x_0)\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}\Delta x^n+f^{(n+1)}(\xi_n)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\Delta x^{n+1} \quad (4\text{-}5\text{-}1)$$

其中，$0<\theta_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$，$\xi_n=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$.

证：首先，据 $f(x)$ 的微分定义，这时在 x_0 的某邻域内有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \quad (4\text{-}5\text{-}2)$$

其次，因为 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，所以有

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\Delta x \quad (4\text{-}5\text{-}3)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间，不失一般性，设 $x<\xi<x_0$.

然后，将式(4-5-2)与式(4-5-3)相减得

$$[f'(\xi)-f'(x_0)]\Delta x=o(\Delta x) \quad (4\text{-}5\text{-}4)$$

现在对 $f'(x)\Delta x$（实为 $f'(x)$，因为 Δx 具常数性质）重复上述过程.

首先，在 x_0 某邻域内，据 $f'(x)\Delta x$ 的微分定义，式(4-5-4)的左端有

$$[f'(\xi)-f'(x_0)]\Delta x=f''(x_0)\Delta\xi_1\Delta x+o(\Delta\xi_1\Delta x)$$

$$=f''(x_0)\theta_1\Delta x^2+o(\Delta x^2) \quad (4\text{-}5\text{-}5)$$

其次，由题设知 $f'(x)\Delta x$ 满足拉格朗日中值定理的条件，于是式(4-5-4)的左端有

$$[f'(\xi)-f'(x_0)]\Delta x=f''(\xi_1)\Delta\xi_1\Delta x$$

$$=f''(\xi_1)\theta_1\Delta x^2 \quad (4\text{-}5\text{-}6)$$

其中 $\Delta\xi_1=\theta_1\Delta x$，$0<\theta_1<1$，$\xi<\xi_1<x_0$.

再则，由于式(4-5-4)和式(4-5-5)的左端相等，所以其右端

相等，即有

$$o(\Delta x) = f''(x_0)\theta_1\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \qquad (4\text{-}5\text{-}7)$$

又因式(4-5-5)与式(4-5-6)的左端相等，故有

$$[f''(\xi_1) - f''(x_0)]\theta_1\Delta x^2 = o(\Delta x^2) \qquad (4\text{-}5\text{-}8)$$

再对 $f''(x)\theta_1\Delta x^2$（$\theta_1\Delta x^2$ 为常数）重复上述过程，又有

$$\begin{aligned}[f''(\xi_1) - f''(x_0)]\theta_1\Delta x^2 &= f'''(\xi_2)\theta_1\Delta x^2\Delta\xi_2 \\ &= f'''(\xi_2)\theta_1\theta_2\Delta x^3 \qquad (4\text{-}5\text{-}9)\end{aligned}$$

其中 $\Delta\xi_2 = \theta_2\Delta x$，$0 < \theta_2 < 1$，$\xi_1 < \xi_2 < x_0$．

$$[f''(\xi_1) - f''(x_0)]\theta_1\Delta x^2 = f'''(x_0)\theta_1\theta_2\Delta x^3 + o(\Delta x^3) \qquad (4\text{-}5\text{-}10)$$

又由式(4-5-8)、式(4-5-9)和式(4-5-10)的左端相等得到

$$o(\Delta x^2) = f'''(x_0)\theta_1\theta_2\Delta x^3 + o(\Delta x^3) = f'''(\xi_2)\theta_1\theta_2\Delta x^3 \qquad (4\text{-}5\text{-}11)$$

如此继续下去，可得

$$\begin{aligned}o(\Delta x^n) &= f^{(n+1)}(x_0)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\Delta x^{n+1} + o(\Delta x^{n+1}) \\ &= f^{(n+1)}(\xi_n)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\Delta x^{n+1} \qquad (4\text{-}5\text{-}12)\end{aligned}$$

总之，得到

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\theta_1\Delta x^2 + o(\Delta x^2) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\theta_1\Delta x^2 \\ &\quad + f'''(x_0)\theta_1\theta_2\Delta x^3 + o(\Delta x^3) \\ &\cdots \\ &= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\theta_1\Delta x^2 + \cdots +\end{aligned}$$

$$\cdot f^{(n+1)}(x_0)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\Delta x^{n+1}+o(\Delta x^{n+1})$$

(余项型)　　(4-5-13)

或 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+f''(x_0)\theta_1\Delta x^2+\cdots$

$$+f^{(n)}(x_0)\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}\Delta x^n+f^{(n+1)}(\xi_n)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\Delta x^{n+1}$$

(中值型)　　(4-5-14)

其中 $\theta_i\in(0,1), i=1,2,\cdots,n$, $x<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<x_0$,对于 $x>\xi_1>\xi_2\cdots>\xi_n>x_0$ 情形 ,同理可得.

由于式(4-5-13)与式(4-5-14)等价,这里着重讨论式(4-5-14),也就是式(4-5-1).

步骤二:式(4-5-1)(也就是式(4-5-14))中有 $\theta_1\theta_2\cdots\theta_i=\frac{1}{i+1}$, $i=1,2,\cdots,n$,从而得到泰勒公式

$$f(x)=\sum\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\Delta x^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_n)\Delta x^{n+1}$$

(4-5-15)

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间.

证:首先,在式(4-5-1)左端表 x 为 $x_0+\Delta x$,然后在 x_0 处(形式上对 Δx)求零阶到 n 阶导数(注意到这时 x_0 ,ξ_n 皆常数)得到

$$f^{(0)}(x_0+\Delta x)\mid_{\Delta x=0}=f(x_0)$$

$$f'(x_0+\Delta x)\mid_{\Delta x=0}=f'(x_0)$$

$$f''(x_0+\Delta x)\mid_{\Delta x=0}=f''(x_0)=2f''(x_0)\theta_1$$

于是有 $1=2\theta_1$,即 $\theta_1=1/2$.

又由

$$f'''(x_0+\Delta x)\mid_{\Delta x=0}=f'''(x_0)=3!f'''(x_0)\theta_1\theta_2$$

有 $$1=3!\theta_1\theta_2$$

即有 $$\theta_1\theta_2=1/3!$$

$$\cdots\cdots$$

一般的有

$$f^{(n)}(x_0+\Delta x)\big|_{\Delta x=0}=f^{(n)}(x_0)=n!f^{(n)}(x_0)\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}$$

所以有 $1=n!\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}$，即有 $\theta_1\theta_2\cdots\theta_{n-1}=1/n!$

同时有

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x_0+\Delta x)\big|_{x_0+\Delta x=\xi_n}&=f^{(n+1)}(\xi_n)\\&=(n+1)!f^{(n+1)}(\xi_n)\theta_1\theta_2\cdots\theta_n\end{aligned}$$

从而有 $$\theta_1\theta_2\cdots\theta_n=1/(n+1)!$$

最后得到

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\Delta x^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_n)\Delta x^{n+1}\\&=p_n(\Delta x)+R_n(x).\end{aligned}\qquad(4\text{-}5\text{-}16)$$

此即 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式，也就是式(4-5-15)、(4-5-1)或(4-5-14).

特别地，当取 $x_0=0$ 时，令 $\xi_n=\xi$，式(4-5-16)即变成麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}f^{(i)}(0)x^i+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间.

4.6 关于"折线逼近"问题：一个折线悖论

如图 4 - 2 所示，对于 $y=f(x)\in C^0[a,b]$，若求其绕 x 轴

的回转体积，可有公式 $V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$，但若求其表面积时，比如这样来表 $S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\mathrm{d}x$，那就不行了. 实际上应该是

$$S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\mathrm{d}l=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+f'^2_x}\mathrm{d}x$$

那么，这是为什么呢？

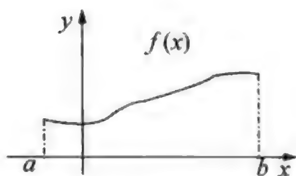


图 4 - 2

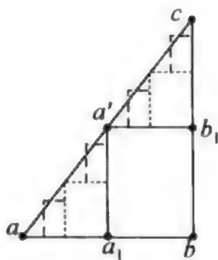


图 4 - 3

又如，对于任一线段 ac（图 4 - 3），作这样的序列折线映射 φ_n，使得 φ_0 为把 ac 映射成两边折线 abc，正好构成一个直角三角形（$\triangle abc$）；φ_1 为自 ac 边的中点 a' 分别作 ab 和 bc 边的平行线，必交于相应边的中点 b_1 和 a_1，从而形成一个具有 4 条边且三个顶点在 ac 上的折线 $aa_1a'b_1c$；φ_2 为在斜边 ac 被等分成的两段上（或说在 $\triangle aa_1a'$ 和 $\triangle a'b_1c$ 上）分别按 φ_1 的方式做映射，将形成又一个具有 8 边且奇序顶点都落在 ac 线段上的折线；如此继续下去得到的 φ_n 折线是具有 2^{n+1} 个顶点（包括端点），奇序顶点皆落在线段 ac 上的折线.

记此映射序列为 $\{\varphi_n\}$，记折线 φ_n 的总长度为 $|\varphi_n|$，则有长度序列 $\{|\varphi_n|\}$，这时出现如下矛盾问题.

（1）$|\varphi_n|\equiv|ab|+|bc|\triangleq C$，$n=0,1,2,\cdots$，$|ab|$、$|bc|$

分别表相应线段长度.

这是不难用归纳法作出证明的直观结论(兹免).

(2) 因此,有 $\{|\varphi_n|\}$ 是个固定数值 C 的常数序列,所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_n| = C$(常数的极限等于该常数).

(3) 但是,从另一方面看,在序列 $\{\varphi_n\}$ 中,折线 φ_n 是逐步逼近原始线段 ab 的. 亦即有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n = ab$,而其长度 $|ab|$ 必然满足 $|ab| < C$.

从而产生了序列 $\{\varphi_n\}$,其长度序列与几何序列当 $n\to\infty$ 时的极限差异难以理解,或说这是一个"悖论".

本节是要说明,上述两例显示的问题皆归为同一类所谓"折线逼近"问题. 可作出如下一般的讨论. 不过由于内容较繁,这里作为一种欣赏,只给出它的基本思想.

首先引入概念:

切折线:对于曲线 AB,若有折线 ab,每边皆与 AB 相切,叫 ab 做 AB 的切折线. 比如一个圆(一种曲线)的外切三角形即是其一条(封闭的)切折线.

接折线:当 ab 的每个顶点皆落在 AB 上时,叫 ab 做 AB 的接折线. 特别地,圆的内接多边形即是其一种接折线.

触折线:若 ab 有部分且只有部分顶点落在 AB 上时,叫 ab 做 AB 的触折线. 比如图 4 - 3 中 φ_n 就是原始线段 ab 的触折线.

相似折线:在触折线序列中,相邻项的折线(段)的"触弧"(相邻触点间的折线部分)保持相似者,叫它们做相似折线. 特别地,如 $\{\varphi_n\}$ 中各项间(任意 φ_i,φ_j 间)皆相似折线.

几何收敛:若折线序列 $\{\varphi_n\}$ 在图形上的极限形式存在,叫

做折线序列几何收敛.

长度收敛:折线的长度序列收敛时,叫该折线序列长度收敛.

曲边三角形:即有一边为曲线弧的三角形.比如接折线 ab 与 AB 间即广泛存在曲边三角形.

在这些概念下可以得到以下各定理(证明免叙).

定理 1　对于 AB,其触折线序列 $\{\varphi_n\}$ 若为相似序列,则 $\{\varphi_n\}$ 必几何收敛于 AB,但不能"长度收敛"于 AB 之长.

定理 2　若闭区间上函数曲线 AB 长度有限,则其上相似折线序列 $\{\varphi_n\}$ 之长度序列有界.

定理 3　对于几何收敛的触折线序列,其长度序列不一定收敛.

(反例:$y_n = \dfrac{\sin 2^n x + 1}{n}$,$x \in [a, b]$,$\{y_n\}$ 几何收敛,但其长度序列却是发散的,即有 $|y_n| = \dfrac{b-a}{n}\sqrt{\dfrac{2^{4n+2}}{n^2} + \pi^2} \to \infty$,$(n \to \infty)$).

定理 4　长度收敛必几何收敛,反之不然.

定理 5　C^1 类(即一阶连续可导函数)曲线 AB 的接折线和切折线皆长度收敛.

定理 6　AB 的触折线序列 $\{\varphi_n\}$ 长度收敛,其必充条件是 $\{\varphi_n\}$ 趋于 AB 的接(或切)折线序列.

从而本理论得出,长度收敛仅仅是折线逼近的一个特殊类型,而通常情形都是长度发散的.这形成了一个似乎难以理解的

“悖论”. 其实这一“悖论”的产生不在别的,正出于极限概念在实数结构意义下显现出的局限性.

显然,一元函数的折线逼近问题研究完全可以推广到(比如)二维的“折面逼近”问题研究. 其实这方面的研究早在 19 世纪末已有诸如许瓦尔兹反例进入(数学专业)基础教材了,这里免叙.

4.7 重积分换元法中 J 式的一个简明推导

在重积分运算主要是二重积分和三重积分运算中,用换元法时有个转换系数叫做贾可比行列式(记为 J). 比如在二重积分运算中作变量替换时有算式 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \varphi(u,v)\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中在推导贾可比行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 时,流行教材上的方法属“几何法”,不仅推导较繁而且条件过强,比如它首先要求 $J \neq 0$,最后再推广成“J 可在低维子集上为 0”,走了一些弯路. 它之所以这样仅为了只在“教材当时已讲过的知识”基础上去讲,那么这里即不必受此约束了.

此外,还有诸如前苏联数学家菲赫金戈尔茨著《数学分析原理》上所用方法虽然优于现行教材的“几何法”,但它要求的教材内容编排顺序不太合理.

本方法来自一个新的思想,只需一点点创新,得到的效果从总体来讲却是使问题变得十分简单、明了. 虽然它不便选入教材中,但作为课外读物选录于此,是因为它具有欣赏价值和启发

意义.

本法可叫做**“向量法”**，其基本思想仅仅是：

注意到一般变换过程 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to J\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 是“保面积”的. 关键得注意 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的实质.

由于 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是矩形面积时，变换后的 $J\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 一般也只能是平行四边形面积，所以只需一般的表出面积式即可，记为

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\mathrm{d}\bar{x} \times \mathrm{d}\bar{y}|$$

为此，只需将 x,y 及 $x(u,v),y(u,v)$ 向量化. 这时又只需要在(x,y)上记

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{x} = (\mathrm{d}x,0) \\ \mathrm{d}\bar{y} = (0,\mathrm{d}y) \end{cases}$$

在(u,v)上记

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{u} = (\mathrm{d}u,0) \\ \mathrm{d}\bar{v} = (0,\mathrm{d}v) \end{cases}$$

于是对 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 可有 $\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}$　(4-7-1)

当换成 $\mathrm{d}\bar{x},\mathrm{d}\bar{y},\mathrm{d}\bar{u},\mathrm{d}\bar{v}$ 的表达式时，即有

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{x} \\ \mathrm{d}\bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & 0 \\ 0 & \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{u} \\ \mathrm{d}\bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & 0 \\ 0 & \mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

将其代回式(4-7-1)则有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x & 0 \\ 0 & \mathrm{d}y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}u & 0 \\ 0 & \mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'_u\mathrm{d}u & x'\mathrm{d}v_v \\ y'_u\mathrm{d}u & y'_v\mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\bar{x} \\ \mathrm{d}\bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'_u\mathrm{d}u & x'_v\mathrm{d}v \\ y'_u\mathrm{d}u & y'_v\mathrm{d}v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

从而有

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\mathrm{d}\bar{x} \times \mathrm{d}\bar{y}| = |(x'_u\mathrm{d}u, x'_v\mathrm{d}v) \times (y'_u\mathrm{d}u, y'_v\mathrm{d}v)|$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u\mathrm{d}u & x'_v\mathrm{d}v & 0 \\ y'_u\mathrm{d}u & y'_v\mathrm{d}v & 0 \end{vmatrix}$$

再按末列展开行列式，即得证

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,\vec{k} \right| = J\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

注 1　显然该证明是十分初等的，所要求的条件也很弱.

注 2　证明中所用到的“面积等于一个叉乘积之模”，以及有关的向量运算也都是刚好学过的知识.

注 3　同理，也可作出三重积分换元公式的推导，兹免.

4.8　Stokes 公式的一个新推导

在闭曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 中，有个将其变成 L 所围平面（记为 $S(L)$ ）上二重积分的“Stokes 公式”，十分方便. 但是，它的推导在流行的教科书上却是很麻烦的，它需要将其分成 $\oint_{L_1} P\mathrm{d}x$、$\oint_{L_2} Q\mathrm{d}y$、$\oint_{L_3} R\mathrm{d}z$ 三部分分别推导后再合成，步骤较多较

为烦琐.

本证明方法的优点在于:① 分项自然;② 结论更广. 比如在本证明中 $S(L)$ 可以是建立在 L 上的任一曲面.

上述优点仅出于一个创新——提出一个"二级向量"概念,从而使证明变得更加直观、简单、明了. 对于学过现行教材中 Stokes 公式的人来说,在这里将其引述出来想必是具有赏析意义的.

主要方法是:

定理(Stokes):对闭曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,设

(ⅰ) $L:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$ 可微,且在 $g(x,y,z)=0$ 中同时可解得:

$z=z(x,y)$,可微,代入上式得 $f(x,y,z(x,y))=0$

$y=y(x,z)$,可微,代入上式得 $f(x,y(x,z),z)=0$

$x=x(y,z)$,可微,代入上式得 $f(x(y,z),y,z)=0$

(ⅱ)由 L 张成的任意曲面 $S(L)$ 与其在任一坐标面上的投影域有一一对应关系;

(ⅲ)一律取右旋系;

(ⅳ) $P,Q,R\in C'(\overline{S}(L))$.

则有

$$\oint_L * =\iint\begin{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

简要证明:首先 $\oint_L * = \oint \overline{F} \cdot \mathrm{d}\overline{S}$

然后分别给出 $\mathrm{d}\overline{S}, \overline{F}$ 并建立它们对于坐标面的分量式——二级向量:

(1)给出并讨论 $\mathrm{d}\overline{S}$.

$$\mathrm{d}\overline{S} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\mathrm{d}s = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

再给出

$$\mathrm{d}\overline{\overline{S}} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

从而可定义 $\mathrm{d}\overline{S}$ 的二级向量式为 $\mathrm{d}\overline{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\mathrm{d}\overline{S}, \mathrm{d}\overline{\overline{S}})\}$.

这里定义

$$\{(\mathrm{d}\overline{S}, \mathrm{d}\overline{\overline{S}})\} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}, 0\right)\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}, \left(0, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}, \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}}\right)\sqrt{\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}, \left(\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}}, 0, \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}}\right)\sqrt{\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2}\right)$$

所以有 $\mathrm{d}\overline{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, 0), (0, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z), (\mathrm{d}x, 0, \mathrm{d}z)\}$

从而有

$$|d\overline{S}|^2=\frac{1}{2}((dx^2+dy^2)+(dy^2+dz^2)+(dz^2+dx^2))$$

$$=dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$$

(2) 给出并讨论 $\overline{F}$. 运用上述同一思想和方法可以得到

$$\overline{F}=\overline{F}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}((P,Q,0),(0,Q,R),(P,0,R))$$

及
$$|\overline{F}|^2=P^2+Q^2+R^2$$

(3) 最后可以得到

$$\oint_L\overline{F}\cdot d\overline{S}=\frac{1}{2}\oint_L((P,Q,0)(dx,dy,0)+(0,Q,R)(0,dy,dz)$$
$$+(P,0,R)(dx,0,dz))$$

(其中比如 $(P,Q,0)(dx,dy,0)$ 为通常两个向量的内积)

$$=\frac{1}{2}\oint_L((Pdx+Qdy)+(Qdy+Rdz)+(Pdx+Rdz))$$

$$=\frac{1}{2}(\oint_{L_{xy}}Pdx+Qdy+\oint_{L_{yz}}Qdy+Rdz+\oint_{L_{zx}}Pdx+Rdz)$$

(再分别用格林公式)

$$=\frac{1}{2}[\iint_{\overline{S}(L)}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+\frac{\partial Q}{\partial z}(-dzdy)-\frac{\partial P}{\partial z}(-dzdx)+$$
$$\iint_{\overline{S}(L)}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+\frac{\partial R}{\partial x}(-dxdz)-\frac{\partial Q}{\partial x}(-dxdy)+$$
$$\iint_{\overline{S}(L)}(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+\frac{\partial P}{\partial y}(-dxdy)-\frac{\partial R}{\partial y}(-dydz)]$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\overline{S}(L)}2[(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy+(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-$$
$$\frac{\partial R}{\partial x})dzdx]$$

$$
= \iint_{S(L)} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}
$$

$$
= \iint_{S(L)} \begin{vmatrix} \cos(N,x) & \cos(N,y) & \cos(N,z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}s
$$

证毕.

显然对于这里引入的“二级向量”概念,还可以探索它更广的意义.

4.9 关于参数方程几何作图问题

“参数方程”是初等数学的内容,但关于参数方程的研究却一直以来没有停息过.这里着重谈谈它的空间意义.

比如,对于函数

$$
y = f(x) \tag{4-9-1}
$$

与其参数式

$$
\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = f(\varphi(t)) = \psi(t) \end{cases} \tag{4-9-2}
$$

之间,只“记住”了它们是一条曲线,却不能说出更多,这是不利于启发思维、学到活知识的.为此,这里对它作一次简单的剖析.

事实上,容易看到以上两式最多可以说在“分析”意义下它是一条曲线,而在几何意义下却是两条完全不同的曲线.

具体地，它们只在 (x,y) 平面上来说才是一条曲线，当分别在各自的空间 (x,y) 和 (x,y,t) 来看时，则是两条不同的曲线了.

换句话说，从几何意义讲，仅当后式(4-9-2)消去参数 t 才可能成为前式(4-9-1). 而消去参数 t 意味着在空间 (x,y,t) 沿着 t 轴向 (x,y) 平面作正投影. 这种投影是实质性的，否则式(4-9-2)不是真正的参数方程.

以上来自几何的考虑也可叫做“静态”的考虑. 此外，还可以视参数 t 为时间变量. 这时式(4-9-2)即成为式(4-9-1)的“动态”表示了.

那么是否可说这时前述的认为曲线式(4-9-1)、式(4-9-2)是“一条曲线”即是正确的呢? 我们说仍然不是. 因为尽管这时的“动态”意义也发生在 (x,y) 平面上，但毕竟有“动态”与“静态”的差异. 从含义讲，动态是过程中的(任意)局部，它正在“划”着这条曲线；静态则是过程的累计结果(动态的时间积分总体)，已经“划”成了这条曲线.

这似乎印证了一句哲学名言，“相异就是矛盾”. 的确，只要它们的形式有所不同，就不可能有真正的同一. 也因此才有了科学上“对看似相同的，应尽量寻求它们的差异；对看似不同的，应尽量寻求它们的共同点”的治学经验.

最后让我们用一个简单例子来说明问题.

例 比较单位圆 $x^2+y^2=1$ 与其参数式

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases} \tag{4-9-3}$$

显然,式(4-9-3)是 (x,y,t) 空间中的柱面 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=y \end{cases}$ 与柱面 $\begin{cases} y=\sin t \\ x=x \end{cases}$ 正交后产生的交线—— 一条无穷的“弹簧线”. 该“弹簧线”在 (x,y) 平面上的投影(式(4-9-3)中消去 t)正好是其前式——单位圆. 如果从(参数 t 的)动态意义讲,则式(4-9-3)表现在“单位圆”上永远只是个作着周期运动的动点. 但从静态(非参数)意义讲,却是单位圆整体.

4.10 关于高维空间几何作图问题

问题的提出:我们已熟悉多元函数,比如对于 n 元函数 $y=f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,常常记此 n 个独立变元的向量 x 为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$(n 维欧几里得空间). 表明人们已习惯于高维空间思维了.

也的确,比如当 $n=0$ 、1、2、3 时都是很现实的,都能在纸(平面)上画出图形来,十分形象. 那么问,当 $n>3$ 时为什么未见有像 $n\leqslant 3$ 维空间的图形? 是否还可以作出像 $n\leqslant 3$ 那样形象、直观的图来呢? 本节即来回答这一问题.

我们总的答案是: 不为也,非不能也.

首先说,所有的作图包括 $n\leqslant 3$ 维空间的作图乃至画画、照相等,都只是一种“表示”而已,莫非把实际的对象映射成一个“表示”它的图案或符号罢了. 只是不同的表示有不同的特征,比如设计图纸的“表示”需要具有精确的尺寸,绘画家的“表示”需

要具有原物的神韵,代数学中的“表示”实为“表示论”,是赋予了严格定义的表示,几何学中坐标系上的“表示”则是为了体现变量间的一种动态关系,作图“表示”则是为了形象、直观,特别有一种“示意图”更是如此.

那么我们这里讨论的仅属于坐标系中的表示,只是为了形象直观,增强思维和理解而作.这就明白为什么在坐标系下既有的图形表示中只有 $n \leqslant 3$ 维空间情形了.

首先说,它不是不可以作出“表示”来的,而是即使作出了“表示”仍然达不到形象、直观的目标,因而不去作.关键是人们没有高维空间图形的直观经验,所以没有那种直观感,因此即使画出来了也不会感到直观.

人们对低维空间图形之所以感到直观、形象,不是因为“表示”本身有什么奥妙,仅在于人们具有这一经验,大脑里存储有相应信息,容易被图形的视觉激发起相应空间概念来.

总之,过去数学上之所以没有 $n > 3$ 维空间图形,不是它不能而是它不为、不愿意,认为没有必要.

为了进一步说明上述观点,这里特地作出一个高维空间几何图形来.将看到,即使仅就“最低”的高维和最简单的几何图形——4 维立方体来说,也足以体会到它的确已失去了几何图形的直观使命.

例 如图 4 - 4,这是个(x,y,z,t)四维空间中的一个单位立方体.它具有 $2^4 = 16$ 个顶点;$4 \times 2^{4-1} = 32$ 条棱;$4! = 24$ 个面,皆符合欧拉公式—— n 维简单立方体有顶点数 $v = 2^n$;棱数 $e = n \cdot 2^{n-1}$;面数 $f = n!$,且满足所谓“欧拉公式” $v - e + f =$

2(**注**:对于复杂立方体更有公式 $v-e+f-r+2h-2s=0$,其中 r 表示内环数;h 表示通孔数;s 表示立体数,这一推广公式在机械制图学等学科中常用).

最后指出,数学中对于高维空间虽然没有直观感的示意图(他们不愿做),但也是少不了高维空间表示的. 比如当所考虑的空间 $\mathbf{R}^n$ 由两个或三个子空间构成时,则可以将每个子空间以一个坐标轴表示,从而将问题化为低维空间坐标系上来讨论. 例如若有 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^{n_1}\times\mathbf{R}^{n_2}$ 则可在图 4-5 坐标系中去考虑了.

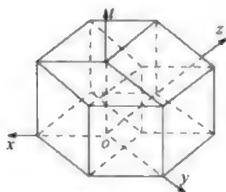


图 4-4

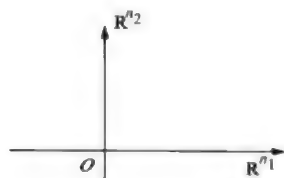


图 4-5

4.11 关于线性代数方程组解空间的理解

通常认为数学中线性问题是最简单的,而简单的常常也是直观的,可是在线性代数学中却不然,学生反而觉得抽象难懂,像读天书,甚至不得不靠死记硬背,从符号到符号,从公式到公式,脑子里老建立不起空间概念来.

的确这也难怪,尽管说线性空间正是笛卡尔坐标系表现的所谓“平直空间”、欧几里得空间,但因为线性代数学面临的空间正是高维空间,据 4.10 节知它已超越了人们经验所及的直观感,所以建立不起(低维空间里的那种)空间概念来.

不过这也不是绝对的，高维空间里仍然还是有规律可循以帮助我们理解的，加上可采用上节谈到的将高维空间化为其子空间(从而成为低维空间)关系等手段，还是容易建立起空间概念来的. 这些也都是本节要说明的问题.

比如对于 n 阶齐次线性代数方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0} \tag{4-11-1}$$

与 n 阶非齐次线性代数方程组

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{4-11-2}$$

的解集合的结构特征理解，如果只停留于公式和符号而不懂得它在空间上的几何意义，则既掌握不牢，也会影响后继课程. 比如将影响到对常微分方程中常系数线性微分方程组解结构的理解.

为解释它们的解结构特征，首先回顾一下 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 中 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在满秩的简单情形下的几何意义. 由于矩阵的几何实质是表示一个空间，同时 $\boldsymbol{A}$ 在式中的地位也是个向量(比如可看成 n 个列向量(作为元素)构成的一个行向量)，而 $\boldsymbol{AX}$ 表明两个向量的内积(一个向量长与另一向量在该向量上投影长之积)，所以(4-11-1)表明向量 $\boldsymbol{X}$ 总是垂直于“向量 $\boldsymbol{A}$ ”(也是空间 A)，亦即在其上的投影为 0，所以这时只有 0 解.

同理可理解方程组(4-11-2)，这时向量 $\boldsymbol{X}$ 与空间 A 不正交(其内积为 $\boldsymbol{B}$ ，非 0)，这时即有非 0 解 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

须知在一个既定的“满秩”空间内是不可能再有一个垂直于该空间(又落在该空间内)的非 0 向量的，但可以有甚至无穷多个与之非正交的向量. 原因是前者要求是同时垂直于空间中每

个向量的向量,后者却没有这一要求(限制).

例如,设 A 是在某个二维坐标系下表出的一个二维平面,那么同在这个平面上不可能再有一个非 0 向量与之正交(垂直),否则必然会超出该空间. 若不要求垂直该平面(即不要求同时垂直平面中所有向量),这样的向量不仅有而且无穷多. 比如同在该平面内任一向量皆不可能同时正交于 $\boldsymbol{A}$ 中每个向量,因而都可能与 $\boldsymbol{A}$ 表出的该空间斜交,只是各自产生的内积不一定相同罢了.

在认识了特殊情形之后即可推广认识一般情形了. 此即 $\boldsymbol{A}$ 不满秩的情形,这时它已经不再是 n 维空间,但容易看到方程组(4-11-1)与式(4-11-2)中 $\boldsymbol{A}$ 满秩的简单情形仍在其中,只是来得复杂一些罢了.

这时可设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r<n$,并相应地记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}'_1 & \boldsymbol{A}'_2\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^1\\ \boldsymbol{X}^2\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\qquad(4\text{-}11\text{-}3)$$

已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $r\times r$ 矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 为 $r\times(n-r)$ 阵,$\boldsymbol{X}^1$、$\boldsymbol{B}_1$ 皆 r 维(列)子向量,余下的矩阵和向量的阶自明.

于是方程组(4-11-1)变成 r 阶等价方程组

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}^1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{0}\qquad(4\text{-}11\text{-}4)$$

其解为

$$\boldsymbol{X}^1=\boldsymbol{A}_1^{-1}(-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2)\qquad(4\text{-}11\text{-}5)$$

这时 $\boldsymbol{X}^2$ 是自由参量,记解集合 $\{\boldsymbol{X}^{11}\}$ 为 $\widetilde{\boldsymbol{X}^{11}}$,则它等价于齐次方程(4-11-1)的解集合.

同理,对于非齐次方程组(4-11-2),则简化成为

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X}^1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2=\boldsymbol{B}_1\qquad(4\text{-}11\text{-}6)$$

并且有解(记为 $\boldsymbol{X}^{1*}$),

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{1*} &= \boldsymbol{A}_1^{-1}(\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2)\\ &= \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X}^2\\ &\triangleq \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{X}^1 \end{aligned} \tag{4-11-7}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 为方程组(4-11-2)(亦即方程组(4-11-6))的一个特解,记解集合 $\{\boldsymbol{X}^{1*}\}$ 为 $\widetilde{X}^{1*}$.

这时容易来解释它们的几何意义了.

这里正好用上图 4 - 5 的思想——对这里的 n 维空间,视其特有的子空间为坐标轴,可表作三维坐标系的形式如图 4 - 6 所示,其中 X^1 子空间(r 维)表以横轴;再表($n-r$)维余空间为 $X^2 = X_1^2 \times X_2^2$.

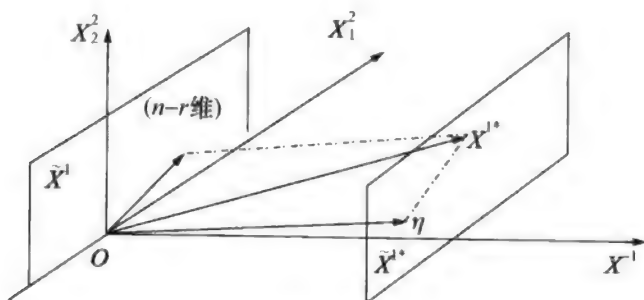


图 4 - 6

这时可以看到,方程组(4-11-4)的解集(等价于方程组(4-11-1)的解集) $\widetilde{X}^1$ 正好构成一个线性空间(概念见 2.1 节例 1),而方程组(4-11-6)(等价于方程组(4-11-2))的解集 $\widetilde{X}^{1*}$ 仅仅平行于 $\widetilde{X}^1$ 空间,而不是线性空间,原因是它不含有 0 元素,因而不满足线性空间定义. 方程组(4-11-6)的任一元素 $\boldsymbol{X}^{1*} \in \widetilde{X}^{1*}$ 是由确定解 $\boldsymbol{\eta}$ 加上 $\widetilde{X}^1$ 中一个相应元素而成.

至于 $\boldsymbol{\eta}$，虽然也是 r 维向量，却不必在 X^1 空间内. 关于这点可这样来理解. 设降秩的方程组(4-11-1)的解空间由矩阵 $\widetilde{\mathbf{X}}$ 表出，则有 $\boldsymbol{A}\widetilde{\mathbf{X}}=\mathbf{0}$，那么相对于非齐次方程组(4-11-2)则从形式上来说，应该有 $\widetilde{\mathbf{X}}=\widetilde{\mathbf{X}}+\boldsymbol{\alpha}$ 才能满足 $\boldsymbol{A}\widetilde{\mathbf{X}}=\boldsymbol{B}$，亦即这时有 $\boldsymbol{A}(\widetilde{\mathbf{X}}+\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{B}$，从而有 $\boldsymbol{A}\widetilde{\mathbf{X}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{B}$，形式地(如果 $\mathbf{A}$ 满秩)有向量 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，但因 $\mathbf{A}$ 的秩为 $r<n$，所以它等价于方程组(4-11-6)的形式，即有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{A}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1$，也就是这里随便取的 $\boldsymbol{\alpha}$ 事实上就是式(4-11-7)中的 $\boldsymbol{\eta}$. 当然这只是一种代数的理解，由于几何空间的解释话语比较冗繁，兹免.

赏析五
哲学数学

这里谈的是“哲学数学”而不是《数学哲学》.哲学数学是从哲学思辨的角度对数学作出一些认识,而《数学哲学》(赏析二中曾谈到)属现代数学的前沿领地,主要有实证论、证明论、逻辑论、模型论、递归论以及非标准分析等分支学科.它们一个共同的基本目标是探索数学的根基,本章不拟讨论它.本章仅以一种“大众哲学”(即非专业哲学)的思维方式从几个足以使人产生兴趣的方面来欣赏.

5.1 谈谈数学美[①]

5.1.1 关于美

据说“美学”一词产生于 18 世纪后半叶,却不知道人类对

①本节主要内容曾与不等式专家王挽澜教授合作发表过.

美的概念和美感产生于何时，不过据人类《美学史》说来，至少也得比苏格拉底(公元前4—5世纪)还要早.

什么是美？人类为什么存在着共同的却又不是绝对统一的美感？

在鲍桑葵看来，“凡是对感官、知觉和想象力具有特征的，同时又通过同一媒介服从于一般的亦即抽象的、表现力的东西叫做美.”这未免太涩口了.

我们认为美感是人类主观世界对客观世界在一种心理层次上的好恶反应. 或说当一件客观事物能在自己的心理或生理上表现出吸引、接纳的心态反应时，被叫做是美的. 反之，在心态上产生拒斥、避缩反应时，叫做是丑的.

美的事物能激起人们的好奇心理、热爱心理、向往心理、孜孜以求的心理. 虽然美感可以随着人的不同、民族阶级的不同而有所殊异，但人类共同的美感毕竟是主流. 正是这种共同的美感像一块磁石使人类社会成为一个有序的、团结的、具有向心力的整体.

也是在这种美感主流之下存在的具体差异，使得世界变得万紫千姹、五光十色，否则不就成为一个单调乏味、万口同声、一花独秀的枯燥世界了吗？大自然真会设计自己.

如今科学越来越难以找到人与动物的根本区别特征，但典型与非典型之差异总是存在的，也许美感也是人类区别于动物的典型心理特征之一.

美，表现在生理上即为甘与苦；表现在伦理上即为善与恶；表现在价值论上即为利与弊；表现在学科上即为趣味与枯燥.

平直的有美，曲折的有美；简单的有美，复杂的有美；黑有黑得美，红有红得美；有自然美，有艺术美；有外表美，有心灵美；有丰腴美、有瘦劲美，西施瘦得美，贵妃胖得美. 还有对称美、非对称美、视觉美、触觉美、听觉美……甚至玩具店里的丑娃娃也丑得美.

美与不美也是一种感觉，人情感万物，心情愉悦时看到什么都顺心、什么都美.

美与丑充斥了人类生活的一切角落.

人类爱美，因而追求美，对数学"完美性"的追求就是一例. 比如哥德巴赫猜想，至少其初衷只不过是为着完成一项数学美的任务罢了. 即使现代纯数学家为之绞尽脑汁的好些课题，论其社会意义往往还谈不上或暂不明显，但他们至少有一个共同的目标，那就是喜欢数学——对数学美的追求.

5.1.2　数学真的美吗

正如，同在一个礼拜大厅里的人，大家都同样在赞美上帝、顶礼膜拜，但要问各自的内心难道就真的处在同一个心理层次、同一个虔诚心度吗？经验告诉人们，其间的差异是很大的. 有的是来忏悔的，有的是来求佑的，有的是来祈福的，有的是为增寿的，剩下来的才是真正修身有素，以求继续修炼正身来的. 甚至有的祈佑者本来就心存疑虑，"上帝真的存在吗？真的美吗？真能保佑我们吗？"但在如此千心一诚的气氛中，他敢想而不敢说，甚至连想也不敢想，只得昧心的附和着，人家弯腰我埋头.

类似的“从众现象”在社会上、生活中比比皆是.

自古以来人间流行的都是赞美数学、褒扬数学，特别在今天，课堂里、社会上人人都在说数学美，已经成为一种时尚. 那么要问，数学真的那么美吗？它在每个人的心里都一样的美吗？每个人对它都是那么心悦诚服的吗？

回答是不尽然的，里面仍然存在着各种各样的心态.

尽管说在“冠冕堂皇”的场合人们都众口一词地说数学美，但是真正窝在心里的，却是有不少人曾经怀疑过或者一直怀疑着数学之“美”. 体会到的不是别的，倒是枯燥、苦涩，美从何来？说它美也许是一些自命聪明的人装腔作“秀”的吧？

甚至有人既对以陈景润为典型代表的数学家们表示敬佩，却也对他们表示同情，觉得他们可怜，因为他们太苦、太累、太不值了. 由此也对数学产生了畏惧感，以致不敢效仿他们.

既然一点也想象不到陈景润“徜徉哥德巴赫猜想世界”的乐趣，还奢谈什么数学美？

的确，虽然说数学美，但它既不是路边的鲜花，驻足可赏，也不是朋友送的生日礼物，乐手可得，更不是探囊取物.

数学美，数学中蕴藏着丰富的美，但也需要学会去欣赏它才行.

有人比喻得对，数学是隔岸的鲜花，只有敢于且能够涉水才能获得；数学是橱顶的水果，只有能爬上储备梯者才能拿得到；数学是沙漠中的绿洲，只有事先忍受了干渴才能欣赏到它的异景.

的确，如果没有艰苦的攀爬、没有站到一定的高度，那是欣

赏不到数学美的. 正如一个钢琴家，没有经历过枯燥、乏味的苦练，是享受不到成功喜悦的.

当然，对数学的美感、欣赏能力也是随着攀登过程，一点一滴成果积累，而逐步上升起来的.

享受美及其乐趣，并不总是在轻松过程中进行的. 比如运动场上的人汗流浃背、气喘吁吁，其狼狈形象很难说他美，但他却认为美、认为有趣，乐在其中.

做作业的学生虽然焦眉愁眼、苦相可怜，但当一道数学“难”题被他“破解”之后，脸上立刻泛起笑容，一边继续更高效地做着作业一边还哼起了小调，显得乐滋滋的. 这就是美，这就是他尝到的一种数学美.

还有，人们大概都曾不同程度地体会过，当用不同方法解同一问题而殊途同归，得到同一个答案时，不由地感叹道，“数学多美啊”；当一个难题压得你浓眉紧锁，但在去饭堂的路上忽然茅塞顿开时，不由地感叹道，“数学真美啊”！这些都是我们体会到的数学美.

任意一门学科，在没有认识到它、没有进入到它的领地之前，往往不觉得它美，有时甚至觉得丑，数学即是这样的. 数学对于意志薄弱者、畏惧艰苦者可算一个最大的泥潭，可对于一个努力钻研，有志于事业者却是无限的乐园.

美感是可以建立的、可以培养的，也是可以改变、可以迁移的，数学更不例外. 18 世纪数学王子高斯就因为在小学时发现了 $1+2+\cdots+100=\frac{1+100}{2}\times 100$ 这一计算公式，欣赏到了数

学之美，而对数学产生了极大兴趣，以致一发不可收拾，终于成为载誉数学史的一位大家.

从某种意义上说，学习数学的途径首先就是要建立对数学的美感，通过美感即能产生兴趣，兴趣即能产生追求，追求即能产生创造以及接纳知识的最佳心境.

所谓“只有热爱数学才能学好数学”就是这个原理.

数学家阿拉尼说，“由于我热爱数学，我常常这样想，如果对数学不理解，任何哲学都谈不上，所以我敬之为智慧之母.”古希腊数学家洛克拉斯说，“哪里有数，哪里就有美”. 函数论名家别尔曼说，“……人们普遍认为音乐、艺术及数学作品都是美妙的”.

也许人们都曾闪过一个疑问或惊奇，为什么音乐的乐谱也能用 1，2，…，7 来记录？是的，数字配上了音、调即成了另一种美，可见数字(从而数学)所蕴涵的美了.

的确，喜欢数学或其某个分支的人，总能于其中发现越来越多的激发他兴趣的东西，这就是他发现的数学美.

总之，数学是美，但它是高尚之美，只投抱于具有一定修养的人；它是刺玫瑰之美，只折服于那些不畏荆棘的人.

5.1.3 数学之美

以上谈到的数学美还只是通过劳动欣赏到的美，严格说那里更多的只是一种主观心境. 那么，从现在起则要正式谈谈数学所存在的内在美、客观美.

比如，也许我们曾为魔方入过迷，曾经怀疑过棋盘上的故

事，曾经感叹八个音符所产生的无穷乐谱，甚至为自己十个指头上产生的数学作过遐想……

总之，生活中本身就蕴藏着丰富的、内在的数学美.

关于数学内在更多更为深刻的美，放到下面去细说，这里特别来谈谈应用数学特定的美.

应用数学特定的美主要体现在数学与自然界的统一美、和谐美；数学与社会实践间的协调美、效益美.

首先说数学在自然科学、工程技术中体现出的美，这可是举世共知的了. 早在古希腊的毕达哥拉斯就赞美过数，他说“万物皆数”. 即使伽利略(1564—1642)这位实验学之父对数学也一往情深，他曾感叹道“自然之书数学写成”，他还颇富诗意的欣赏到“数学是上帝用来赞美大自然的音符”. 这些都足以说明数学在自然科学中早已显示出它的美，早已融入工程、技术等自然科学领域，早已博得代代大师们的爱戴和赞赏.

的确，正是数学使得牛顿能够建立起证明论，从而才有了物理学. 正是数学支撑起了近代科学，成为它们不可须臾缺失的工具. 如果说是近代科学技术使人类物质生活水平产生了一个质的飞跃，那么数学则是这一飞跃成功的保障.

其次来看看应用数学在社会科学方面体现出的美. 我们说在这方面应用数学更有直接产生经济效益，直接为人类切身利益服务的美. 如今还有诸如运筹学、优化数学、价值数学以及系列的、越来越多的数量方法运用到了经济学、社会学、系统科学、软科学等方面，使得在现代，应用数学大大扩大了它的领域.

具体地，比如对经济学中当今主流学科——西方经济学来

说. 正是数学使得西方经济学能体现出它鲜明的实证特征. 西方经济学能在 18 世纪资产阶级取得并巩固政权后,及时将经济学从原来以意识形态、规范分析为特征的政治经济学转变到以技术、效率、定量分析为特征的实证经济学,既很好地实现了迅速提高经济水平的宗旨,又深刻地揭示了经济社会内在规律,因而得到全世界的推崇,这是数学在经济学中体现出的又一大美.

反过来说,经济学也在丰富着数学之美. 诸如直接产生于经济学的集值映射、运筹学和博弈论等都是经济学直接对数学的促进和贡献.

又如,经济学中一般均衡模型及其证明引出的《数理经济学》分支之所以能成为经济理论的典型,能为经济学大为增光,就因为在它的"一般均衡存在性模型"的证明中充分运用(并促进)了现代数学的高深理论和方法.

这些都直接表明了,经济学中也深深蕴涵着数学之美.

再如计算机科学. 我们知道计算机的诞生是个划时代的事件,为人类科学技术和社会生活引来了一场大革命,形成了一个不折不扣的计算机科学时代. 但是人们不能忘记计算机科学是产生并脱胎于数学的,因此说今天的计算机科学也是数学为人类社会提供的一大贡献. 被誉为计算机之父的冯 · 诺依曼(美籍匈牙利人,1903—1957)也是一位知名的数学家(具体说是代数学家). 此外,冯氏还是博弈论之父,是"经济学一般均衡模型"及其证明思想的一个主要提供者).

公认计算机的核心理论和技术不在其硬件,仅在其软件,不妨说软件是数学的多门学科以及数学思维的交汇处,冯 · 诺依

曼的贡献也就在软件上.那是在计算机已经出现之后,仅因为他提出了存储理念和产生软件的思想而使得计算机真正成为具有独立运行机制的“智能机”、“电脑”,也才使得人们把“计算机之父”的美称不是给了涂灵,也不是给了计算机的总设计师,而是给予了仅仅提出能使计算机智能化的思想的他.由此也足见智能化,也就是今天的软件,在计算机设备中的地位了.

总之,计算机科学之美同样也折射着数学之美.

例 关于 π 的美.写到这里正值今天是(2008 年)3 月 14 日,即“ 3·14 ”日.这个数字正好是圆周率 π 的两位近似值.不知什么时候开始,这一天被知识界定义为 π 的生日了,也叫做“π 节”.

在这一天世界各地不少人集会庆祝,比如据报载,去年的今天仅在美国即有马萨诸塞理工学院和洛杉矶的探索博物馆两个活动点,人们纷纷聚集在那里吃馅饼,佩带以 π 为主题的首饰,还将 π 的前 100 位刻在铜板上,等等.

据说吃馅饼的意义是因为馅饼的英文名 pie 与圆周率 π 的英文名 pi 谐音.

人们为什么对圆周率这么倾心?原来一切皆出自圆周率 π 的美.

今天,人们都知道 π 是个无理数.不仅如此,还知道它是个超越数(即非代数数或不可能属于任意阶的任意多项式的根值集者,是无理数集的子集).无理数(当然也包括超越数)是不可能拿得出任何一个精确值来的一种魔鬼式的存在,哪怕像$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$这样十分简单且十分熟悉的数也是如此.

据圆周率迷们说，之所以觉得圆周率美，就在于它似乎没有任何一点可被识别的规律、永无止境，这对于年轻人的记忆力来说尤其是一个强烈的挑战. 因此，常常在“π 节”还要举行背诵圆周率比赛.

目前背诵圆周率的世界纪录保持者在中国，是中国西北农林科技大学学生吕超. 他于 2005 年用了 24 小时零 4 分钟正确背诵到了第67 890位.

追溯起来，人类对圆周率的兴趣不只在现代，其历史也是很久远的. 一般认为系统研究圆周率应起于公元前 240 年的阿基米德对“化圆为方”问题的系统研究，直到 1967 年借助计算机已将 π 算到了小数500 000位，足以载满一部五六百页的厚书了.

在这一历史中也有中国宋朝数学家祖冲之的“祖率”和杨辉的“辉率”所作出的贡献；1737 年奥特维德第一次用 π 来表示圆周率；1767 年 π 被兰伯特证明其为无理数；1882 年 π 被林德曼证明为超越数；1906 年开始甚至有人用英语诗的形式来帮助记 π，当时记到了 30 位. 其方法是以诗中依次第几句的字母数正好对应 π 中小数点第几位的数字. 据说 2007 年有个来自美国弗吉尼亚州的工程师完成了一首这样的拥有4 000句（对应于 π 的4 000位）的长诗，创下了历史新高.

5.1.4 数学中的简洁美和整齐美

不会打扮的姑娘在修饰中的失误有多种，常见的一种是弄得烦琐而娇柔，既失去了自然美，也失去了艺术美.

数学中的美是自然美和艺术美的有机合成，数学语言本身

就是十分优美而不可能用别的语言来代替的.

比如牛顿力学定律、麦克斯韦方程、爱因斯坦相对论公式等,就其描述的自然规律来说是何等的深刻而复杂,但数学表达式又是何等的精确而简洁！无怪乎人们都说“真理总是简洁的”.

又如,数学使用的十进位制就是一种简洁的计数法,其阿拉伯数字更是不仅简洁,使用起来也十分方便、顺手.

的确,哲学家也承认,世界上没有任何一种语言比数学语言来得更为简洁而确切.也因此,19 世纪末以来,哲学也在尽可能地运用着数学语言的表达方式.

此外,比如现代数学所广泛使用的公理化方法,在满足了它逻辑严格性需要的同时也给了数学以简洁美,由此亦看到逻辑与美的和谐一致性了.

特别地,不少数学分支还建立起了所谓“公理体系”,依赖它所演绎出的优美学科,宛如几根柱石托起的座座精美楼榭,更把个数学大观园点缀得光彩耀目.

其实,从微观上看,一道道数学练习题不就是一个个具有简洁美的作品么？曾经有人形容过,“一道数学题中的语言就像舞台上的道具,没有一件多了的,也没有一件少了的”,无怪人们总把一道数学题的简洁计算与证明叫做“漂亮”啊！

众所周知,天空中的云彩,地图的边缘,大地上的河山,晨曦中的树冠乃至阳光下的树影等,是何等的不规则、何等的复杂！然而令世人惊奇的是法国年轻数学家曼德布罗特于 20 世纪 70 年代给出了这一大类复杂对象一个简洁的数学描述,从而创立

了一门新的数学分支学科——分形几何学，又叫分维几何学(Fractal Geometry). 这是运用数学工具探索复杂的客观世界，呈现其简洁美的又一典型范例.

现在来谈谈数学的“整齐”美. 按黑格尔的理解，“具有同一形状的一致重复性叫做整齐”. 这一整齐美在微积分学中诸如周期函数、泰勒公式、傅立叶公式、牛顿插值公式等广泛存在着. 比如一元泰勒公式中的“一致重复性”即表现为各项系数均具有 $f^{(n)}(x_0)/n!$ 的形式.

在常数项级数中，最具整齐美的当推正项级数了，因为它能用整齐性“$u_{n+1}/u_n \leqslant \rho < 1$ 和 $u_{n+1}/u_n \geqslant 1$”分别判明级数的敛散性.

仔细观察求导公式与积分公式易知，它们在一定程度上都具有这种整齐美. 例如：

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

类似的还有反三角函数求导公式的整齐美等. 甚至有些函数如 $\sin x$，$\cos x$ 等，其高阶导数也具有这样的整齐美……

5.1.5 数学中的对称美

大自然以对称的方式构造了人，给人自身以美的启迪. 借此，人类发现了一切生物界的对称结构乃至天体和大自然中种种对称结构. 进而，对称概念上升成为一个哲学术语受到青睐，甚至在艺术中还创造出了越来越多的对称. 例如，画家或摄影师在构图时总怕“失重”；中国的对联、律诗特别讲究对仗、对称；中国的天坛、埃及的金字塔等建筑都是对称造型的典范.

在数学中，对称概念被严格化了、形式化了，从而更加展示了它的美. 当注意到的是，在具有对称性的对象间常常蕴涵着更多更美的性质. 比如“极值、最值”问题就是几何学与微积分学中常见的一种. 又如，一个对称多项式可具体地表示为初等对称多项式；无约束优化问题中“黄金分割法”是等速“对称”搜索的手法，它易实现而且效果好；颇具对称趣味的还有柯西中值定理、对称方程、对称矩阵、自共轭算子等.

此外，数学中的诸如对偶空间、共轭空间、对偶命题、对偶定理、互反定理之类，何尝不具有对称性从而繁演出精妙的内容呢？不可忘记的还有，对称性还常常能给我们带来计算和证明中的许多方便和简化. 例如，偶函数在对称区域上的积分即只须在其部分区域上进行即可，对齐次多项式或齐次函数的讨论要比非齐次的来得容易.

特别的，物理-数学家威腾(美，1951—)之所以能获得 1990 年度的菲尔兹奖(号称数学中的诺贝尔奖，每四年评一次)，就因为他巧妙地在数学中运用了对称思想. 简单说是在物理学统一场论中，有个自 20 世纪 60 年代提出但因数学表达和分析难而一度冷下去的“弦”理论，却在 20 世纪 80 年代得到了威腾的振兴，从而形成了一个十分有希望的“弦”理论，其关键思想即是给出了一个“对偶”概念和“超对称”概念，使得数学模型的建立获得了成功. 这是数学的对称美表现的又一个典型范例.

有的数学式乍一看来似乎没有对称美，但在改换形式后就会呈现出明显的对称美来. 重积分、曲线(曲面)积分中几个公式就是这样的. 比如格林公式即可改写成具有对称美的形式：

$$\iint_D \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

又如商的求导公式(包括复变函数)可改写成对称形式：

$$(u/v)' = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u & v \end{vmatrix} /v^2$$

参数方程表达式的二阶求导公式和它的曲率公式均为对称形式：

$$y_{x^2}'' = \begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_{t^2}'' & y_{t^2}'' \end{vmatrix} /(x_t')^3$$

$$k = \begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_{t^2}'' & y_{t^2}'' \end{vmatrix} /[(x_t')^2 + (y_t')^2]^{3/2}$$

自然，若一个数学式同时具有对称性与整齐性，那就更美了. 比如二次型及其相应矩阵即是如此(这里免记). 此处仅举大家熟悉的莱布尼兹求导公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$$

5.1.6 数学中的和谐美

音乐要讲究谐韵、和声，装饰要考虑尺寸、色彩，就连菜肴也得顾及颜色、造型……这些都表明人们对和谐美的追求.

在数学中，各种意义下的和谐美比比皆是，公式 $a^2 + b^2 = c^2$ 即是直角三角形三边之间一种和谐美；平面上的椭圆、双曲线、抛物线的形状不同，却能统一于“圆锥曲线”概念下，且都能用二元二次方程来表达，此即它们的和谐统一美；内容浩繁的欧几里

得几何体系是建立在它的“公理系”上的，这本身即表明了一种和谐美. 至于曾谈到过的黄金分割所表现出来的和谐美，更令古今人们赞叹不已. 中国古砖的长宽比和古窗框的长宽比等说明，人们早已发现矩形的长宽以满足“黄金分割比”为美了.

事实上很多专家都从不同的专业角度不谋而合地发现，“黄金分割比”在艺术造型中颇富美学价值. 20 世纪的心理学家费希纳就是这样的人.

古希腊标准美人——女神维纳斯身上有多处合符黄金分割比的部位；演员以立于舞台的黄金分割点为最佳；成功的小说、戏剧常在 2 /3、3 /5、5 /8 或 8 /13(也是斐波那契数——黄金分割比的近似数列)处呈现高峰……皆出自黄金分割反映出的自然界的内在和谐美.

乍看起来风马牛不相及的、分别代表着“数”与“形”的代数学与几何学，在笛卡尔坐标系中居然被统一起来，产生了所谓的解析几何学，进而又与分析学等结合，产生了微分几何学、积分几何学等.

在数学中互相转换、彼此渗透、交替促进的事实屡见不鲜. 比如解各种方程时常出现的消元、降次、降阶情形，以及把连续过程(如微分方程、积分方程等)转化为离散过程等，都体现了数学之美，也是大自然之间的和谐美.

话说回来，我们欣赏数学中的美，提倡发掘数学的美，却不可为美而美，不可矫揉造作，不可故弄玄虚，不可使数学成为橱窗里的工艺品. 须知，不管纯数学还是应用数学中的美终非人造美，而是其“天生丽质”，是自然美的一种表现形式. 研究数学的

目的终归是为了更好地造福于人类;宣扬数学美的目的终归是为了吸引更多人认识数学、热爱数学、发展数学,探索数学美本身也是发展数学的一种动力.

总之,美好事物在大自然中是广泛存在的,对美的追求是人类的共同行为.但科学中的美只是放在橱窗顶的苹果,只有有一定高度或站在一定基础高台上的人才有可能享有它,数学更应该如此.

特别对于青年学子来讲,为使其乐于探索数学美,必先使其建立起数学兴趣.然而这一兴趣又来自对数学美的认识.换言之,为了发掘美,必先授其美.这不是怪圈,不是矛盾.这里的"美"是有各种深度的、各种层次的,需要循序渐进,螺旋推进.

5.2 "="的欣赏①

"="(等号)这个从小学起就已熟悉的符号,如今仔细品味起来越来越感到它意味深长.笔者相信知识界的好些人,特别是那些成功者,都曾被它的简洁、明晰激起过浓厚的数学兴趣,甚至因它的公证、严厉消磨过不少不眠之夜.也许正是这种诱逼,促成了他们对它的逐步了解,以致可以说是它把他们一步一步地引进了数学殿堂,使他们步入了成功之路.

是的,路不走不长,山不爬不险,回眸反顾才备感惊叹.

试看那著名的哥德巴赫猜想(已谈及),任何一个大于 4 的

---

①本节选自笔者参与的著名教育家李心灿教授主持的一项研究成果.

偶数 $=1$ 个素数 $+1$ 个素数.

再看那神秘的费马大定理：$x^n+y^n\neq z^n$，$n\geqslant 3$，$x,y,z,n\in\mathbf{N}$（自然数集）.

数学史告诉我们，为了这其中的"="与"≠"，不知磨光了多少个颅顶，消耗掉多少个青春，留下多少个可歌可泣的事迹.

"="，多么简明的两条平行短线，它来得多么自然. 可谁又能想到，原来它还有着一段不平凡的历史、丰富的内涵，好似一本简明的哲学，又好似一首浓缩的诗篇.

尽管笔者对"="的认识还很肤浅，却也想把点滴心得记述下来，与感兴趣的读者切磋、共勉.

5.2.1　谈谈"="的由来

我们相信，"等"（或叫"相等"、"等于"）的概念在每个古老民族中都有着自己的独立词汇，不必等到有了民族间文化交流，才"进口"而来. 这说明"等"的概念是在人类长期实践中总结、概括出来的.

如今可以说"等"的概念已充满了人类生活的许多领域，其同义词、衍生词也一再扩展，诸如相等、对等、恒等、全等、平等、等价、等同、重合、公平、相似. 甚至可以说"等+不等 = 人类社会的基本内容". 小至交易分配，大到政治斗争，无不体现出这一点.

伟大革命家孙中山先生在其遗嘱中写道："余致力国民革命，凡四十年，其目的在求中国之自由平等……"

特别地，"等"的概念在数学中的地位更是人所共知的，以致

似乎可以说，没有了“等”就没有了数学. 可是作为符号的等——“＝”，仅其由来也是颇为曲折的.

据有关史书记载，“＝”为英国数学家、牛津大学教授雷科德(1510—1558)在其1557年出版的著作《智力磨石》中首先使用. 雷科德曾为之争辩道，“再也没有别的两件东西比它们更相等了”. 尽管我们今天看来是如此的自然，但当初并没有立即得到公认. 例如，著名的代数学家韦达(意，1540—1603)就曾以“acqualis”一词来表示相等，即使后来他作了改进，用了记号“～”也未能启用“＝”. 甚至后来的著名人物，如开普勒(1571—1630)、伽利略(1564—1642)、费尔马(1601—1665)等皆仍然用文字来表示相等. 被誉为解析几何之父的笛卡尔(1596—1650)也仍然我行我素，用他的“∝”来表示相等.

用“＝”表示相等，真正为大家所公认并普遍加以使用，还是17世纪中叶以后的事. 这与德国数学家、微积分创立者之一的莱布尼兹(1646—1706)的影响是分不开的. 他认为一个好的符号可以大大节省思维劳动. 一套好的符号不仅可以起到简明、速记、节省时间的作用，更能精确、深刻地表达某种概念、方法和逻辑关系，用别的任何语言都达不到这一效果.

的确，正是在这一见解的驱使下，莱布尼兹对选用符号之重视，对数学符号之精心研究和卓越贡献，使其流芳百世. 比如他提出的微分与导数符号 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 以及积分符号 $\int$（把Sum(和)的第一字母S拉长而成）就优于牛顿所使用的符号，从而使得当初因盲目崇拜牛顿而抵制莱布尼兹符号的英国数学界一度落后

于欧洲大陆一百年.

据说莱布尼兹对于“等”的记号也作过认真研究和对比，他在广泛征求同代人的意见之后才终于选定了“＝”，并且带头在其著作中大量使用，从而使得这一符号“带着自己的生命出现，并创造出新的生命来”.

5.2.2 关于“＝”决定的“类”

数学中最基本的概念之一是“关系”，而最基本的关系之一是“序”.“＝”则是一种特殊的序关系.

特别地，利用“＝”还可对任何数的集合进行分类.

事实上，“等”就其汉语词义来讲，也是个“类”的概念，即所谓等级、等价、等高、等同……不过相等的元素集却可以有多种情形. 这就是本节所要探讨的“＝”所决定的“类”.

1. 孤立元素类

首先，这是一类完全相等的情形，比如 $1=1$，$x^2=x^2$，不仅数量相等，而且形状、形式都一样. 原来这里“＝”的两端本来就是一个东西. 其次，根据哲学上“不同就是差异”原理，如果“＝”两端是不同的东西就不可能完全相等了，于是“＝”联系的事物集合便自然地被分成了两大类：一类是完全相等的元素集；另一类是不完全相等的非孤立元素集.

数学和哲学感兴趣的是后者，这就是以下诸类.

2. 形式类

形式类是数量相等而形状、形式不相同的元素集. 比如，无穷集 $(4, 0+4, 1\times4, 2\times2, 2^2, \sqrt{16}, 12/3, \cdots)$ 或 $\{1+x+x^2, 1+$

$2x+x^2-x, (1+\frac{1}{2}x)^2+\frac{3}{4}x^2, (\frac{1}{2}+x)^2+\frac{3}{4}, \sqrt{(1+x+x^2)^2}$,

…}中的元素都是数量相等而形式不同的元素类. 但这些形式并非无聊的游戏，数学的等式演算正是在这样的形式类上进行的. 例如

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}} \\ &= \sin\frac{1}{3}x(2\cos^2\frac{1}{3}x+\cos\frac{2}{3}x) \\ &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots \\ &= \cdots\end{aligned}$$

这里所有函数式构成的集合即是一个“形式类”.

恩格斯曾指出:“从一个形态到另一个形态之转变，并非无聊的游戏，这是数学科学最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就无法进行一个稍微复杂的计算”. 的确如此，比如，中学代数里，用了很多时间来训练因式分解，其实就是从一个形态到另一个形态的转变，并且其作用也是相当大的，因为它与求代数方程的根以及对代数方程根的理解等都有着密切的关系.

又如，当要求计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值至小数 100 位时，尽管这个被积函数是初等函数且结构也很简单，但其原函数却不能表示成初等函数. 如果我们不利用形式变换

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

则难以计算出原积分式的近似值到所要求的精度.

事实上，还可以进一步观察得到结论 1.

结论 1　数学中，任一个“＝”联系起来的有意义的量的各种形式，总构成一个非空集（记为 S），其元素个数（记为 $\# S$）满足 $\# S>1$，且 $\# S$ 愈大其数学内容愈丰富. 这也是数学中公式推导、恒等变换、形式运算等内容赖以生存的基础.

3. 祖暅类

这是一个以集合形式表示出来的多元函数. 设 $f(x,y)$ 是定义在 $X\subset\mathbf{R}^2$ 上的一个连续函数，$Y=\{f(x,y):(x,y)\in X\}$ 是其值域，则 $\{(x,y,f(x,y)):(x,y)\in X\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个集合，即通常说的曲面 $Z=f(x,y)$. 此时，对任一 $C\in Y$，集合 $\{(x,y,f(x,y)):f(x,y)=C\}$ 就是上述集合的一个子集，即曲面 $Z=f(x,y)$ 的一个截痕，截痕上各点的函数值均等于 C. 通常把这样的曲线几何地叫做等高线. 实践中相对于不同的实际意义还有所谓等压线（气象）、等势线（能量）、等效用线（经济）……由于在每种情形下，将等高线（截痕）族全部累积（求并）之后，都将回到 $f(x,y)$ 本身. 所以说它类似于祖暅定理：一个任意物体体积（V）约为 n 个水平的平行等截面（祖暅截面）面积（V_i）乘以高度 h 的 n 分之一后求和之值，即 $V\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{h}{n}V_i=h\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{V_i}{n}=h\widetilde{V}_{均}$，当 V 是一般事物时，其任一祖暅面即是一个等值类.

因此，不妨把具有这一特征的类型叫做“祖暅类”. 显然，稍作推广，也可叫这种“等”类为富比尼（1879—1943）类.

特别地，比如对多项式 $\sum\limits_{i=1}^{N}a_ix^i$，集合 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{N}a_ix^i:x\in\mathbf{R}\right\}$（实

则代数曲线)也是 $\mathbf{R}$ 上的一个无穷集,但当令 $\sum_{i=1}^{N} a_i x^i = c$,$c \in \mathbf{R}$ 时,都将决定出一类不多于 n 个元素的复数集(记为 I),这时 I 虽不是 $\mathbf{R}$ 的子集,却仍有祖暅集的实质.

4. 相交集

例如

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z=0 \end{cases},\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases},\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

皆表示平面 OXY 上以原点 $O(0,0)$ 为中心,半径为 a 的一个圆,但从 OXY 三维空间看,该圆的得来却是不同的. 类此,在 OXY 空间可以有多种不同的方式来生成该圆,该圆上的点集就是所用各种方式下的交点集,因此把它叫做交点类.

事实上,对于每个方程组,特别是常微分方程组,若存在非空解集合,则这样的解集合也是一种相交类.

一般的,稍作抽象,还可以这样来叙述:设函数 $f(x)$、$g(x)$ 的值域分别为 $f(D_f)=u_f$,$g(D_g)=u_g$,则所谓 $f(x)=g(x)$,仅当 $u_f \cap u_g = \Lambda \neq \varnothing$ 时,在子集 $f^{-1}(\Lambda) \subset D_f$ 或 $g^{-1}(\Lambda) \subset D_g$ 上才成立,而在 Λ 以外,或说从整体来说 f、g 一般是不同的. 由此可以得出结论 2.

结论 2 数学中可以由多个函数相交或由多种方式得到同一个元素集,把这样的元素集叫做相交类.

总之,尽管以上分类尚不完全,也非绝对,但总可以说"="能够通过不同的方式产生多种元素类(等子集). 特别地,因为"="满足自反、对称、传递等所谓"等价"三公理,则在每个这样

的子集中“＝”就像一座座桥梁，把所有元素连接起来，形成一条条连通的通道.

5.2.3　等中之不等

从一般意义上说，“＝”之外就是“≠”了，但要说“＝”之中还有不等，就是有待解释的趣味话题了.

“＝”之所以能从事物中分出若干个相等“类”来，就在于等中有“不等”. 事实上，这也是与客观事物中存在的辩证关系对偶的.

例如，文学中常用“比喻”，显然比喻的双方不是相同的事物，但它们的比喻“点”却是相等的. 比如列宁说，“调查如十月怀胎，解决问题如一朝分娩”，是说两个事物都存在准备酝酿和产生结果这一过程，在这点上二者是相等的，但显然两个事物又是截然不同的.

对应到数学上来也有类似的现象.

例如，$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b-a$，在不带量纲意义下它们相等，但若带了量纲则右端还需要乘上 1(单位)才能相等. 同时这里也看到了，带量纲的等式范畴是囿于不带量纲等式范畴的. 数学推演(常常)是不带量纲的，所以数学中等号的作用更为广泛.

再如，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$，$\xi \in (a,b)$，虽说两端数量相等，而几何图形却是不同的，甚至可有无穷多个不同图形的面积等于 $f(\xi)(b-a)$，亦即有无穷多个函数 $g(x)$，使得 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$，或者说这时尽管有相同的中值，但函数并不相同. 由

此可以得出结论 3.

结论 3 “=”常常联系着一些不等的事物，从而进一步显示了在等与不等之间“等是局部的，不等是普遍的；等是相对的，不等是绝对的”这一辩证关系.

最后我们还看到，不仅利用等中之不等概念有助于数学思维，而且作“不等中之等”的思维有时也是颇有裨益的.

比如 $x<y$，我们总可以表为 $x+t=y(t>0)$，这是把二维空间的不等关系提升到高维空间去考虑，从而实现了“=”关系.

须知，这一思想在线性规划中是起了很大作用的. 比如，对一般的线性规划模型(即线性的条件极值问题(其中 s. t. 即为条件)，其思想是很简单的，第一次接触的读者不必紧张)：

$$\begin{cases} z(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \text{Max} \\ \text{s. t.}: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i, i=1,\cdots,m \\ x \geqslant 0, x=x_1,\cdots,x_n \end{cases} \end{cases}$$

为了运用解此类问题的流行的单纯形法，首先需要化为所谓典则形式

$$\begin{cases} \bar{z}(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+\sum_{i=1}^{m} \alpha x_{n+i} \\ \text{s. t.}: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i, i=1,\cdots,m \\ x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

这就是将 n 维空间中的不等关系化为 $n+m$ 维空间中的"等"关系，从而使问题得以解决.

总之，等与不等及其演变关系充满了数学世界，更充满了现实生活，岂乃区区短篇可尽意耶?

5.3　数学文化欣赏

5.3.1　什么是文化

文化是个多义词，至少有针对个人的和针对群体的这样两种分法.

对于个人来说，文化系指文化知识，包括知书识字的能力和知识水平等，通常也叫做文化程度、文化水平. 由此推广，也有文化教育、文化修养等含义.

对群体来说，文化系指群体生活或地区人群中共同的习惯、习俗、风俗和时尚，包括家庭文化、企业文化、部门文化、地域文化、民族文化，乃至全人类的共同文化. 由此推广，还可有文化艺术、文化创造等支义.

群体文化是本节所要讨论的主体.

在群体文化中又可分为传统文化和现代文化两种. 通常说的文化多指传统文化，也是本节所讲的主体.

传统文化是一个地区、一个群体在长期历史中逐步形成并流传下来的非物质遗产. 它可以沉积在建筑中，可以积淀在文字上，更能体现在生活习俗和风土人情中，而且还会自然地演绎、发展下去. 比如，成都历来是个有名的休闲城市，说明它有着休

闲文化. 的确如此，诸如它的名小吃特多，以成都为中心的四川茶馆等都是享誉世界的. 不仅如此，这种文化还在自然地发展着，比如近年来形成的农家乐文化和“麻将风”即是如此. 更可展望的是，一个健康养生和老年宜居文化也已在此初露端倪，这显然是它的传统文化“势”的惯性使然，是其无形资源的自然利用，是最省成本的(须知，休闲经济也是经济链中重要一环).

的确，传统文化是不断接受着时代洗礼、发展和选择、淘汰的，因此存留下来的和就“势”发展着的总是相对优秀的.

当然，不同地域、不同民族间的传统文化在比较之下也是存在优劣差异的.

特别当传统文化与某些新文化，与其他先进文化交汇时，总会发生碰撞，这时一些不合时宜的传统文化往往会起着“拖后腿”的作用，无形中阻碍民族前进.

文化也是可以人为地有意识创造的，一般说现代文化即属于此. 比如一个新兴企业也可以有自己的企业文化，这就是在短期内自己创造并坚持下来，终于成为本企业属性特征的东西，属现代文化.

文化也有一种民俗文化与高雅文化之分. 民俗文化属习惯、风俗、习俗，高雅文化属修养、历练、情操.

文化与性格具有对偶性，也可说文化就是群体的性格.

有说“性格决定人的命运，文化决定民族的兴衰”.

5.3.2 什么是数学文化

人类文明属于人类文化，数学属于人类文明，因此数学属于

人类文化.

根据文化的定义，数学既属于文化知识、文化教育的“个人文化”，又属于整个人类这一大群体共同的“群体文化”.

特别地，数学是兼有传统文化和现代文化的一个优秀文化.

客观世界本来没有数，但人们生活离不开数，更离不开数学. 已说过，也许这还是人区别于不懂得“朝三暮四与朝四暮三”关系的猴类之处. 不仅如此，人类社会愈发展将愈离不开数学，社会愈进步愈需要高深的数学. 数学与社会是同步发展过来的.

虽然说数学发展史只有几千年，但作为数学文化的形成史至少也有几万年. 自人类从树上下到地上，需要合作狩猎，需要结绳记数，需要合理分配时，就产生了数和数学. 从而“数”和“算”逐步融入了人们的生活，这就是数学的文化化过程，也就是数学典型的传统文化特征.

在近代，在今天，已经看到，数学更成为自然科学、工程技术乃至社会科学共同的支撑，今后的问题更是要让数学思想，而不只是一堆堆数学公式，去武装社会的每一个建设者们，以促成人们在工作和生活中自然的数学意识和数学思维的形成，也促成数学现代文化特征的典型实现.

此外，数学还是兼有民俗文化和高雅文化的一种综合文化.

其民俗文化特征表现在自古以来人们已经形成了的，在生活中离不开“数”、“算”、数学，从家庭小账本的记、算到菜市场“豆腐账”的结算，无不充满着这一古朴、自然的关于“数”的民俗文化.

其高雅文化特征在于，数学知识可以武装人、强化人，数学

训练可以提高素质、提高修养，更在于数学是人类社会之所以能有今天不可须臾缺少的软支持、软方面.

再则，数学文化还有着两大含义：

一个是指数学中体现出来的“文化艺术”式的人类文化，诸如数学中显示出的对称美、简洁美、精确美、严格美等；

另一个是说应该让数学进一步文化化，让丰富而深刻的数学思想，诸如其逻辑思维、空间思维以及公理化意识(参见 2.9 节公理文化)和探索精神等进一步走入人们生活，进一步成为典型文化，成为人类共同的修养和时尚.

尽管也说一个公式宛如一首诗、一箴格言、一帧警语，但看到的只是形式，其含义才是它本身. 数学因其形式语言的别致，常常给人以错觉，认为它妙、玄，好像天上掉下来似的，因此往往把人们的视力扯偏，只注意到它的“形”而忽视了它的“神”——它的思想，忽视了去品尝它的“味道”.

今天人们发现，究其思想，原来高深数学也在我们生活中，就在我们身边.

数学：思想重于公式.

一个高深的数学公式，其思想往往是简单的，因此是能够进入数学文化的.

倒是与我们生活最为密切的数(具体说是实数)反而最不简单. 人类至今尚未看到能认清实数的希望在哪里呐.

笔者曾经在一文中把进化归为人类 (平均)智能进化、生理进化和社会进化三种. 分析表明，智能进化十分缓慢，几千年来没有什么明显改变，大大低于社会进化. 社会进步主要靠社会进

化的累积性发展.如今这种“累积”性发展速度越来越高,而“累积”的前提是科学技术,但科学技术的根本又在于人类智能,因而最终还是人类的缓进智能将制约社会的高速发展,亦即社会将不可能永无止境地发展下去.

如果是这样,那么首先将表现为数学发展的有界性和数学文化发展、普及的有界性.

此外,尽管作为基础的数学研究、数学教育在世界上最无保守,国际最欢迎数学人才的交流、数学学生的交流,但并非各国数学水平有望趋于一致.究其原因自然很多,但有一点是肯定的,那就是数学的发展也与自己的民族特征、文化传统、历史进程和经济特征等有关.

换句话说,数学发展,包括其研究和实践也与自己的文化和国情分不开,也要有自己的数学文化,不可抱纯粹的拿来主义态度.

5.3.3　数学思维与数学文化

作为数学的现代文化,应该体现为普及的、时尚的数学思维,而不只是全民皆会扳拇指、作心算就成了的.那么什么是数学思维?怎么才能形成数学思维?

1. 数学思维概述

数学思维又叫数理思维.总的说来,就是要求把用数学符号、数学公式、数学模型描述客观事物的技巧和技术,把数学理论和结论、数学处理问题的技巧和方法等“形式内容”,上升为思想,或说回到它的思想,软化成为思想,提升成为思想,把握其精

神，用以观察、认识、处理、对待客观事物，这叫做数学思维.

简单说，数学思维就是把数学思想作为一种方法论，去观察、分析客观世界的做法.

总之，数学具有方法、技巧的“科学”特征，数学思维则具有方法论的“哲学”特征.①

2. 数学思维与职业思维

数学思维属于职业思维，所有职业思维都是一些特殊的方法论，可叫做“职业方法论”. 比如具有长期专业经历的人都有意识无意识且不同程度地具有职业思维特征.

牧民说话常以草原上的事物作比喻，农民说话常以庄稼作比较，医生常以生理做模式，工程师则把什么都看做机械来思维……这是为什么？这是他们在各自的长期职业生涯中形成的思维模式，这就是他的(职业)方法论、世界观.

当然，职业方法论并不都是好的，往往有其偏激或偏颇之处. 这也是所谓“专业也有束缚人的地方”、“外行最有突破精神”等说法的来源.

理论和实践都表明，数学方法论——数学思维却是一种正确的世界观. 简单说是因为数学是最为广泛的科学，因此其结论的适用面具有哲学的宽泛性.

所以我们应该努力推进数学思维的文化化.

当然，数学思维也是一种修养，需要努力，需要用心方能形

---

①这里又用到了“笛卡尔分割”——将科学分作“科学”和“哲学”(见《辞海》笛卡尔词条).

成，不过一旦形成则终身受用.

3. 数学思维内容简述

什么是数学思维呢？根据对数学思维的理解，主要可归为如下几条.

(1) 空间思维，又叫几何思维. 按数学大家阿罗尔德的说法，“数学家绝大多数属空间思维型”. 根据笔者的观察，一般人的思维特征亦如此，莫非就是一种直观思维，凭借一种直观感. 差异仅在于，数学家脑子里的空间比一般人脑子里的空间更活一些、维数更高一些罢了. 具体说是因为数学家经常在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中思维，在他们看来，物质空间莫非 $\mathbf{R}^n$ 中 $n\leqslant 3$ 情形而已，习惯了即成为自然了.

因此我们都可能养成这样的空间思维习惯，一般说只要有了高等数学基础，加上“有心”坚持，则必然能成.

当然，所谓 $\mathbf{R}^n$ 空间思维只是习惯于以 $\mathbf{R}^n$ 空间作为背景去思维，具体的思维方式如下.

(2) 关系思维，又叫函数、映射分析. 也就是说，在欧氏空间背景下分析考查问题时，首先要看到所分析的对象有多少个影响因素，它们围着问题的整体目标或核心，存在着什么样的关系. 如果对这种关系作出数学表达式来，那就是函数、模型；如果只须宏观考查其因果性，则就是映射. 尽管我们不一定要对该对象作建模分析，但总可以作出关于“因素、关系或函数、映射”的定性思维.

(3) 特征思维，即函数特征的定性思维和考查. 诸如函数的线性、非线性以及约束性考查；非线性函数的有界性、单调性、凹

凸性考查，以及极值点分布，极限状态等；函数的约束性表现为前提条件(公理)、附加要求、实际限制等的定性认识.

当然，作为一种思维、思考，没要求写出表达式，没要求实证过程和实证结论，因此，它只是一种定性的、哲学式的过程，其结论也是一种观点式的看法.

(4) 变异思维，又叫动态思维. 当所考查对象具有较强的随时间而改变的特征时，则可以从具有单向、匀速变动特征的时间变量出发去对问题作出上述特征思考. 把它叫做关于变异的数学思维，简称变异思维.

(5) 数理思维. 人们说，“数学物理是一家”. 不可否认，至今数学用的最漂亮、最精美的领域还是在以物理学为基础的广大科学领域内. 再说，在数学思维的 $\mathbf{R}^n$ 中真正具有直观性的还是在物理空间内. 所以人们常常把数学思维直接叫做数理思维.

以上所述都是定性认识，属哲学分析. 具有一定数学修养的人都会运用其从数学实证过程中自然提升成的思想，把它作为方法论(亦即数理思维)去认识和处理问题.

须看到，即使在作建模的实证分析时，首先一步还是要对其对象作定性分析，否则很难保证能建出合理的模型来. 这里所说定性分析就是上述数理思维，只是有的建模者不一定意识到这点(只是一种无意识行为)罢了. 也许这也是通常作实证分析时有的人不够重视对自己的对象作定性分析的缘由吧.

与之对应，那种非数理思维的定性分析常常连一个像样的方法论也顾不上去寻求，便直接作起了所谓直观分析，实则是“拍脑袋”、凭经验作分析，这是说不上科学性的，其效果也是可

想而知的.

我们应该积极倡导数理思维,以在既有的深厚的数学民俗文化基础上进一步弘扬数理思维,使之成为巩固的、现代的、高雅的数学文化.

5.4　数学中的心理学

5.4.1　学习数学的年龄特征分析

1. 人的几个结构关系式

根据经验和数理思维,我们给出人生有关智力发展的几个概念,及其相互间关系与特征,并且为了形象和简便,拟采用"公式"形式来表出.

$$\text{人} = \text{躯体} \cup \text{精神}$$

$$\text{精神} \cup \text{神经} = \text{大脑}$$

$$\text{精神} = \text{心理} \cup \text{理智}$$

特别地

$$\text{精神} = \frac{1}{t}(t^2 \cdot \text{心理} \cup a \cdot \text{理智})$$

其中,a 表示修养 (叫修养系数),修养愈高则理智在精神中所占比重愈大;t 表示年代系数,愈古老则 t 愈大,愈古老则心理成分愈重.

此式表明,在同一时期内(t 取定数时),越有修养的人 (a 越大),越具有理智战胜心理的自控能力,反之则反;在 a 一定的条件下,越古的人(t 大),心理成分(野性)越重.

又有

$$\begin{aligned}\text{理智}&=(\text{智商}+\text{情商})\times(\text{记性}\cup\text{悟性})\\&=\text{智力}\times\text{能力}\\&=\text{智能}\\&\approx\text{基础素质}\end{aligned}$$

2. 学习数学年龄特征曲线

(1) 能力曲线. 如图 5 - 1 所示，记为

$$E_i = J_i + W_i = \text{记忆曲线} + \text{悟性曲线}$$

其中，i 表示第 i 个人（理智曲线因人而异）.

经观察、思辨和分析认识可得

$$\begin{aligned}J_i = J_i(t) &= [(t-t_1)^2 + t_1]\mathrm{e}^{-\mu_i(t-t_1)^2} + \delta_{[35,45]}\\&= \frac{t\mathrm{e}^{-2}}{4\Gamma(2)} + \delta_{[35,45]}\end{aligned}$$

其中

$$\Gamma(2) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big|_{n=4} = \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\Big|_{n=4} = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$\delta_{[35,45]} = (t-35)(t-45) + \varepsilon(t)$$

$$W_i = W_i(t) = a(1-\mathrm{e}^{-\mu_i t^2})$$

（此为 logistic 方程 $\dot{x} = \alpha x(1-\beta x)$ 的解型曲线，在图 5 - 1 中只代表 t 轴 Oa 段上的一段函数曲线，至于 ab 段上的函数曲线段，只须特征性地表为直线段即可）

(2) 智力曲线. 如图 5 - 1 所示，记为

$$S_i = N_i(t) + Q_i(t) = \text{智商曲线} + \text{情商曲线}$$

其中

$$N_i(t)=[(t-t_1)^2+t_1]\mathrm{e}^{-\bar{\mu}_i(t-t_1)^2}=\beta\frac{t\,\mathrm{e}^{-2}}{4\Gamma(2)}$$

（t 分布曲线，$t>0$）

$$Q_i(t)=h_i\mathrm{e}^{-\mu_i'(t-t')^2}+\varepsilon(t)=1-b\mathrm{e}^{-\delta_i(t-t')^{-2}}$$

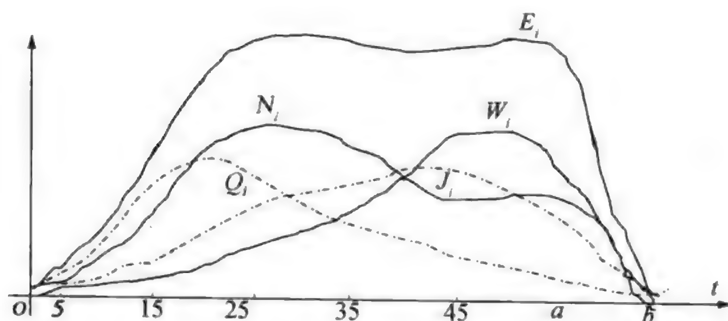


图 5－1

3. 人的学习年龄特征段

(1) 5—15 岁：记忆段

该年龄段的特征是记忆性强，听到的、看到的无须用功即可记住，但善记不善理解. 此外，还表现为手上“记忆”能力强，易练手功，也喜欢动手，此时利于操作灵巧型训练，如练琴键、弦乐器、打字等. 当然，手上训练也是利于智力开发的. 特别应注意，记忆期是为以后进入创造期作知识准备的. 同时也要注意培养思维习惯，促进其悟性发展.

总之，应该在承认这一年龄特征的基础上，适当提前注重理性培养.

此外也应重视激励自己情商的发展，以促进其智商的充分发挥.

(2) 15—25 岁:知识段

该段特点是记忆能力的发展趋于稳定,理解能力开始上升,因此可以说是记忆型到理解型的过渡阶段,两型兼备.

所谓“知识段”,系指这里记忆的信息型知识能得到一定的理解,这时已有一定的逻辑思维能力和联想能力,但这种理解只能是局部的、被动的,那种主观能动地去探讨、理解事物的特征还不具备,因此这时的知识主要还是记住的,还不属于自己的知识.

(3) 25 岁—:理解段

一般说,人在 25 岁左右开始进入“悟性期”,即现代人提前进入“而立之年”,民间说是“落教了”,“长省了”,我们说是进入了“反刍期”. 这时对客观世界以及过去涉猎的知识,将逐渐产生一种主动进取,追问个为什么. 可把这样的特征叫做人进入了“理解段”,表现在图 5 - 1 中,即 W 的上升较陡. 自然,这时容易产生一些心得、新思想,或说进入了创造性年龄阶段.

还有个特点是,过去记忆的知识将重新决定取舍,经过自我反刍理解和“再发现”后便沉淀下来成为自己的知识,形成观点、学说. 否则即便过去记得的甚至十分“纯熟”的知识,如果此期内得不到“反刍”或长期不用,将被遗忘,特别是过去生硬记下的科学知识,甚至可忘得一干二净.

当然,25 岁以前 (青少年期)获得知识的多少将决定其进入“理解段”后获得属于自己知识的多少,也决定着以后理论创造的功底.

比如这些年来在笔者著作的读者中,先后有过不少非数学

出身的理工科人士与笔者切磋过,从中尚能看出一些规律. 比如一些成年以上的人往往是力图创立新学科,开辟新方向,撰写新著作,他们在建立理论基础时都不约而同地从不同角度归结为对数学的需求. 这时有多个对实数结构的探求者,也有对数的表述方式表示怀疑者,也有对数学模型的描述能力不满意者等. 他们都有自己大胆的"创新"或"改造"思想……

由此笔者想到,一方面历史上不知有过多少"无名氏"怀疑过数学、"改造"过数学. 因此今天的数学真正是经历过千锤百炼的. 另一方面,数学基础或者说数学修养对于一门新学科、新方向的探索具有多么大的基础性作用! 所以青少年时代多读点书,多积累一些知识对于他的未来是多么重要!

君不见社会上多少"聪明"人由于青少年时期缺乏必要的知识积累和基本功修炼,到了悟性期,便只能想些歪门邪道的事,盖出于这一原理吧.

4. 教育的本质特征认识

我们说教育的目的在于开发和提高理智(或叫理性)能力,但本质上只能起到客观的、非直接的、非本质的作用,其方式是只能作诱导、启发、激励,因而不可操之过急. 原因在于人的记忆、悟性、智商等的基础部分是由其自身,或说是先天决定了的,甚至于情商也存在着一定的先天因素. 而教育只是后天的、外在的作用,它虽不是满足社会发展所必需的智力投资、劳力资本的完美方式,却也是唯一途径(至少现在还是如此).

作为现代知识分子,必须充分研究、认识先天和后天这样的两个方面,才能在自己工作中既不犯急躁毛病,又不至于气馁

放任.

5.4.2 智力开发工程之困难性不容低估

综合上述讨论,我们将进一步通过建模分析得知,人类智力开发这一社会工程是何等艰巨,其效率不容乐观.

首先,若记人类智力为 Z,则已得知,影响 Z 发展的因素有智商进化(z_1)、年龄(生理)特征(z_2)、学习环境进化(z_3)、教学进步(z_4)及教育改革(z_5)等.同时 z 与 $z_i(i=1,2,\cdots,5)$ 间皆正相关;若仅看 z_i 间关系,还是非线性、非独立的,不过各自独立的作用是较小的,所以可近似表作

$$z=\prod_{i=1}^{5} z_i^{a_i},\quad \sum_{i=1}^{5} a_i=1\quad (a_i>0) \tag{5-4-1}$$

(a_i 是 z_i 的对数权,或叫弹性系数)

因此 z(作为相应量来看)的增长率也很微弱.虽然还可看到 z_1、z_2 与社会(s)的进步是呈正相关的,但 s 对 z_1、z_2 的作用效果甚微,这里可以忽略.

此外,据有关研究,z_1、z_2 变化也甚微,且 z_1、z_2、z_3 还不可控,这一来 $\{z_i\}_1^5$ 中只有 z_4、z_5 的可操作性强一些.不过由于它们不是 z 的主要因素(α_4,α_5 甚微),所显出的效应仍然很低.这就意味着教育任务和教育改革的艰巨性.下列过程即是对这一结论的证明.

为使讨论合理,可表作 z 的平均变化率 $\dot{z}/z$ 来讨论,显然它仍然很小.还可得知它围绕着一个阈值(记为常量 e),使得 z 大于 e 时,$\dot{z}/z$ 将下降.所以可表作

$$\dot{z}/z = a(\mathrm{e} - z) \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

其中,a、e 为正参变数,且 $a \approx 1$.

另一方面可看到,社会(s)的发展将取决于智力 Z,即 $S = s(z)$. 同时,根据上述分析亦知,S 的平均变化率(视 s 为相应度量值)可表为

$$\dot{s}/s = b(z - s) \qquad (5\text{-}4\text{-}3)$$

其中,b 为正参变量,且 $b \approx a$. 亦即 Z 也是 S 的阈值,并且原则上还应该有 $b = b(z_5)$,不过因 z_5 变动微小,可以仍然取 b 为常数.

这里式(5-4-2)、式(5-4-3)叫做 logistic 方程. 对于式(5-4-2)可通过直接积分得到解

$$z = \frac{C\mathrm{e}}{C + \mathrm{e}^{-bat}} \quad (C\text{为积分常数}) \qquad (5\text{-}4\text{-}4)$$

当取初始值 $z(t_0) = \mathrm{e}/2$ 时,$C=1$.

同理,对式(5-4-3)有解

$$s = \frac{Cz}{C + \mathrm{e}^{-bzt}} \qquad (5\text{-}4\text{-}5)$$

当 $z(t_0) = \mathrm{e}/2$ 时,$C=1$.

从图 5-2 可以看出,曲线 $z = z(t)$ 发展十分缓慢,这是因为 a、e 很小之故. 但因 b 大,而 $s = s(t)$ 曲线发展较快. 若将式(5-4-4)中 z 的增长性一并考虑到式(5-4-5)中,则在 $t < t'$ 时,s 曲线应该比 z 作为常量看待的式(5-4-5)曲线上升更陡. 但当 $t > t'$ 时,则较式(5-4-5)曲线的陡度下降更快,意味着这时社会发展更缓慢. 所以 t' 是不幸时刻,希望没有它更好,若有它,则希望它来得愈晚愈好.

现在来说明(不算严格证明),必存在 t',使得 s 曲线与 z 曲

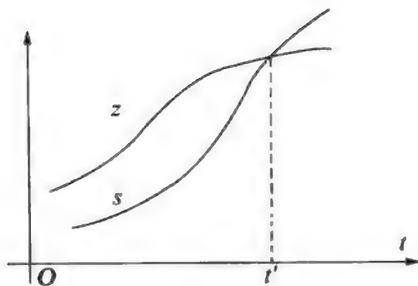


图 5 - 2

线在这里相交. 这是因为从现实观察得知，比如现代社会即处于 $t<t'$ 的区间内. 亦即 t' 只是未来的存在，由于 $b\approx a$，s 的单增比 z 的单增快，所以这一相交时刻(有限值 t')必然存在.

其实直接比较式(5-4-3)、式(5-4-2)，在 $b\approx a$ 条件下，同样可以得到这一结论.

总之，由此表明，为使社会(s)有更高的发展，应致力于让 t 往后移，从而首先应该让 z 曲线更陡，升得更高，这时由于 $s=s(z)$，必使 s 也更陡、更高，这样即可使它们交于更远的 t'. 为此，据式(5-4-1)分析，只能对可操作的 z_4、z_5 采取措施，也就是要进行培养模式的改革和优化.

这就是客观规律赋予我们智力开发的更为艰巨的使命.

在高等数学的“教”和“学”中都应该注重思想修养，注意开发思维、开发直觉，注意培养合情推理的能力.

知识可以传授，但思维得靠启发，悟性得靠诱发，严格说悟性是不可能直接传授的.

虽然人类在进化，但看来人类年龄心理特征的进化仍不适应时代的急切需求，认识到这点，应该激起我们更加努力地提高

培养自己的自觉性. 特别是年轻人应该加强理解能力和思维习惯的培养，以最终增进社会智力的提高.

再根据“基因对环境的适应性”，只要如此坚持下去，假以世代即可最终影响到遗传基因的加速进化.

当然，学习数学的心理随着生理的发展规律如此，学习其他科学的规律同样如此.

5.4.3 数学贵在信心，贵在坚持

一般说来，在同一类型的工作中，数学出身的人要比非数学出身的人数学能力强一些，似乎这是个不争的事实了. 但若要问个为什么？也许就会有争议了.

大多数人可能会认为，产生差别的唯一原因是，数学出身的人比非数学出身的多学了好多数学，多做了好多数学题，有过更多的专业训练等.

但是真正有过体会的人则会说，产生差别的主要原因不在于学生时代是否多学了一点数学，而在于数学出身的人更有一种自信心和内压力.

比如在阅读文献时，当遇到一个数学问题，一时未看懂，往往会产生两种不同的态度. 对于好些非数学出身的人，本来就对数学心存畏惧，这时哪怕稍作理解就可以弄懂的，也不敢一试了. 特别还可能想到，我不是学数学的，看不懂不丢人，于是放弃了它，不愿去钻研，失去了信心.

但对于数学出身的人来说，他会想到，我是学数学的，要是别人问到我，我说看不懂多丢人. 于是他会带着这一压力，废寝

忘食地要把它弄通.就这样一次、两次…… 日积月累或月积年累,他的数学"能力"可真的要强于别人了.

反之,那位非数学出身的人,却因为一次放弃了锻炼的机会,两次放弃了钻研的锻炼,久而久之其数学能力也真的落后于别人了.

其实,学生时学到的内容是相当有限的,更多的内容还是工作生涯中逐步弄通,逐步积累起来的.这时不管对于数学出身者还是非数学出身者,都是个平等的积累过程.

正因如此,才有那么多非数学出身者,他们的数学功夫就十分了得.主要原因即在于他们在数学面前没有失去信心,日久天长而成.

恰好相反,也有不少数学出身的人,因为没有那份自信心,最终其数学不如别人了.这是因为并非数学专业出身的人就一定能什么文献都看得懂,好多时候仍然是靠钻,甚至是夜不成眠才钻懂了的.只不过他们有个"习惯",在介绍自己经熬夜、失眠才得到的东西时,不愿把真实的过程说出来,往往只轻描淡写地说,"这很容易,只须如此这般就得到了",以示自己的聪明所在,当然这样的人若多了会更加渲染数学的"神秘"性.

总之,观察结果和自我经验都告诉我们,建立起对数学的自信心是非常重要的.这一自信心既是什么人都可以树立起来,也是什么人都可能丢失的.

我们不仅要树立起自信心,而且要持之以恒,坚持下去,久必生效.

5.4.4　课堂里的心理学点滴

1. 课堂心理学小议

但凡一个艰苦的地方都是一个心理表现最为复杂的场所.

课堂是人类社会几千年的文化窑炉，与历史同辉，被誉为伟人的摇篮、成功者的孵巢、人类文明的源泉，但毕竟这里不是桃源乐土，而是艰苦跋涉之地.

课堂是座山，个个都在那里攀爬过；课堂是泓水，人人都从那里泅渡过来.

课堂是个智能的运动场、训练馆，在激烈的进取与比拼中，其心理反映和反应自然都是十分强烈的. 所以课堂里的心理学是非常丰富的，本节不可能全面述及，仅就数学课堂上的专业差异作作议论.

可以说，在数学课堂里，对全世界的学生来说面临的都是一种“外语”，或说是一种新的“世界语”.

的确，数学堪称一种特殊的“世界语”，好在它的“文字”是世界统一的，发音上虽各有差异却也不大，难的只是其语言中的逻辑推理比一般语言严格，且来的简洁，不容反复解释和细说，因此它的语意往往需要细心去揣摩. 特别是那一堆堆“语句”（数学公式）和一串串“讲解推理”（演算推导）总会使一些心有鸿鹄、时听时逸的学生感到难以捉摸.

这时课堂里的各种心理状态便相继产生了.

笔者认为最为凸显的问题是专业差异所产生的心理悬殊. 比如同样是数学课堂，理科学生就表现得有耐心一些，他们学不

懂时知道课后用更多工夫去补，作业布置得多他不反感，只靠自己努力去追赶，因为他知道这是与他的“饭碗”息息相关的，只得破釜沉舟，没有退路了.

但工科学生总体表现上就要差一点，他们遇到困难时心理上会有意识无意识地给自己一个退缩余地，认为我们是搞工程的，数学只是工具，记住它甚至知道它就行了，现在只须见识见识，以后用到时知道去查公式就行了. 甚至有的还产生反感情绪，认为老师现在要求过高了、过多了，没有必要.

特别地，文科类(包括所有非理工类)学生对于刻苦于数学的思想准备则更差，他们会有意识无意识地认为过去前辈们用的数学少，甚至根本不用数学不也一样出成果、出名人吗？比如经济学上现在流行西方经济学，用的数学虽然很漂亮，好像少不了数学似的，但仍然有不用数学而成为世界级的经济名家呐.

总之，在既有的教材和教学大纲上的专业差别之下，再来一个专业上的心理悬殊，是十分不利于学好数学的. “车轮的气不足则车子前进难，爬坡更难”，这是必须认真对待的一种负面心理.

当然，以上所述，只是从统计意义来说的，或说只是从一般意义来说的. 必须承认其中也有不少特例，理科中不乏持工科心态、文科心态者；工科、文科中也不乏报理科心态者(自然，不同的心态下，都将预示着不同的结局和前途).

所有这些也都是笔者之一近半个世纪教学生涯中对各类专业、各种层次课堂的亲身经历和体会. 笔者曾经在工科课堂上告诫学生“在数学课堂上应该警惕‘工科意识’拖你的后腿”；在文

科类数学课堂上曾告诫学生"应该防止'文科意识'成为你心理上的拦路虎".

尽管各个专业本来就应该有自己的专业意识，有专业意识本来是好事，还应该愈强愈好，但是将其用到数学学习上来，用到克服数学困难之中来，未必是好事. 这时反倒会成为他们数学加气泵的一个个罅隙.

数学、数学意识，特别是数学思维、数学修养，对于哪一个专业的人都不会嫌多，倒是愈多愈好、多多益善. 但它只是橱顶的水果、带刺的鲜花、山崖的雪莲、沙漠绿洲的清泉，没有付出辛劳是不可能得到的.

可是，心理学也表明，"艰苦者总想有个休憩的借口"——我们应该随时准备用自己的理智去遏制休憩的心理，堵塞逃逸的借口.

2. 课堂里座位分布中的"投票"

当学生先后进入教室而自选座位时，往往是好学生、学习认真的学生喜欢靠前，较差的学生，特别是较差的男生，喜欢靠后. 虽然这主要还是一种心理现象，是下意识表现，但也不排除有一定的显意识因素在起作用.

特别地，更有这样一种经验，课堂里当学生人数小于座位总数的约 2/3 时，学生自选座位的结果往往产生一个较为明显的分布中心，这个分布中心一般存在三种情形：第一种是靠后，第二种是靠前，第三种是靠中或叫没有中心，座位比较散.

这三种分布表现出了三种学生班的心理特征，以第一种的心理最为复杂. 第一种情形往往也是初次听课者的首选规律，一

般在第一次听某门课时下意识常常喜欢靠后就座. 此外，作为通常行为，在畏惧该老师、厌恶该老师时也会这样；不愿听本门课、不重视本门课程时也这样.

第二种心理是最为积极的，表现为学生普遍热爱这门课或喜欢这位教师的课. 当然在各种分布情形下一般都会有个别学生能自动选择前座，多是学习认真者，但这不影响总体分布规律.

第三种情形属于前两种的中间状态，所表明的学生态度也是居中的，不激不抑，这里不必赘述了.

总之，可以说三种心理在一定程度上给出了学生对这门课或对这位老师的总体投票、打分. 因此在作教学考查时，一般只要看看这一“分布中心”即可得到一定的信息了.

3. 对教师的心态决定着学习效果

有过这样一个案例. 某系某专业同一年级有甲乙两个班，上某基础课时用同一套教材，但由两位年轻讲师分别包干. 本来乙班教师平常教学效果优于甲班教师的，但事先在学生中有传闻，甲班的教师是副教授，乙班的教师还是讲师，于是两个班的心理差别也就不言而喻了. 但乙班教师全然不知道这些，只是一开始上课就感到有些不正常，学生缺勤多，表情木讷，谈到高兴处也没人高兴，如同嚼蜡，直到半学期以后气氛才逐步扭转过来，那是因为乙班人听说甲班的也不怎么样才“心理平衡”了. 后来虽然乙班教师尚能从学习委员处偶然得知事由，解除了心里谜团，但乙班学生的学习损失却是既成的事实，也是难以补回的了.

如果说这一案例算是偶然的，但相信这一心理规律并不偶

然，人人都可能见过或经历过这类事例. 比如从个人来说，当对老师抱好感时，听得会更认真，也似乎更容易听懂. 反之，则会“左耳进右耳出”. 尽管学生也知道这对自己不利，懂事的学生会从理性上去克服它，但是心理规律毕竟有它的作用，一经发生多少都会留下一些阴影，所以应尽量事先回避才是.

事实上这还是个普遍的心理规律. 比如所谓歌迷现象、球迷现象也都来自这一心理特征. 又如，在飞机上刚起飞时都会听到介绍驾驶员的“光辉”业绩，为的是增强乘客的信任感、安全感，同样出自人们的这一特殊心理. 原来这也是航务方面针对乘客这一特殊心理的一种特殊服务.

显然，教师和教学管理者都应该研究这一课堂心理，并学会用航务的“心理服务方法”去增强学生对教师的信任心理.

4. 偶然“成功”的威力

有这样一个事实，一位学生平时比较调皮、贪玩，因此老挨批，搞的在课堂上灰溜溜的，成为一个差等生. 可是一次偶然机会，化学课的一次平时测验他竟然考了个 96 分，全班第一. 因此受到了班主任和任课老师表扬，同学也投来了难得的羡慕目光.

说也奇怪，从此以后该生简直换了一个人，可以说从命运的根部开始来了一次嬗变，成绩很快攀升起来，并稳定在中上水平，也不那么调皮了.

由此可见“表扬”的心理学动力，哪怕是偶然的一次“成功”对一个人精神的作用有多大. 足见提倡正面鼓励的工作方法是有其深厚的心理学基础的.

不过表扬也需要技巧，不可滥用，若要从心理上被对方“识

破”，那也就“不值价”了.

5. 课堂收获二象论

“二象论”是“教育二象论：复杂性及战略初探”（中国科学教育 2006 年 22 期）中提到的一套方法论. 它揭示出一切客观对象皆由所谓“虚、实”两面（二象）构成，二象处于“此消彼长或既对立又统一”、动态的“对偶”状态.

原来课堂收获也存在着虚、实二象. 显然“实”象就是说得出来的、被显意识接受了的理性部分，这是既有的共识，不必赘述. 要说的是，它也有其“虚”象部分，它不属于理性，而是属于潜意识的，甚至是进入下意识的非理性部分.

作为例证，请考虑这样两个问题：

(1)课堂里思想“开小差”的人是否等于逃课?

(2)学过一门课而“忘光了”与没有学过这门课是否是一回事?

显然答案是明朗的. “开小差”的人与“忘光了”的人虽然不能像得到“实”收获的人那样可以陈述得出来，但也绝不像“逃课者”、“没有学过者”那样“空白”. 表现在同样条件下“开小差者”就比“逃课者”更容易看懂这部分内容；“忘光了者”就比“没有学过者”的相关能力强. 这不是猜测，而是每个知识分子都有过的经验事实. 还可进一步问，人生学过那么多知识，到头来真正记住的有几许? 那么忘了的那“大部分”是否就不该学，是否完全属于浪费呢? 显然不是. “忘了的”最多只是不在显意识的大脑皮层，却也是“沉降”到潜意识的大脑深层次甚至渗透到体细胞的下意识中去了的，这点就连他本人也说不明白的，但在实践中

就会自然地体现出来.

当然,也不能以此作为课堂"开小差"的借口,毕竟虚实二象同时收获到才是好事.同时也是根据二象论,只得到"虚象"收获者也不可能得到授课中的全部虚象.

6. 课堂风气的重要性

都知道课堂风气对于一个班集体的学习来说,是具有举足轻重影响力的.显然课堂风气属于学风、班风,也属于学习"二象论"的虚象.它是个人心理基础上加上群体中"心理感染"作用所形成的集体效应.

首先,人在艰苦中都有个"偷懒"心理.比如在艰苦的负重进程中有"最欢迎别人能给我一个借口以便停下来喘口气"的心理即属此.又如,好的比赛成绩总是出在有强势对手出场的情势下,这是为什么?例如,报载刘翔于 2007 年 6 月 3 日在美国跨出了他的最好成绩 12 秒 92,原因之一是这次有了强劲对手的参加.

其次,回到课堂里来,有这样的现象,课堂上如果老师少布置作业、提前下课等,即使对于学习自觉、学得好、希望多学点东西的学生来说,都不会立即产生反感心理,往往是过后才(从理性上)认识到这是老师在偷懒,也才有意见了的,这是为什么?仍在于一个连自己也不一定认识到的"偷懒"心理.

总之,正是这一"偷懒"心理和群体"感染"心理使得我们的教室里容易产生不利于学习的不正常风气.

那么,我们应该怎样来对付这一"偷懒"心理?

为此,一句让人听迂了耳的套话是"要树立一个好的班风",

但如何树立呢，谈何容易. 经验和观察结果表明一个好班风源自几个好学生之间的竞争形势及其形成的“心理感染”作用. 这时犹如有强手出阵的比赛场，人人皆有的好胜心理将淹没并替代其“偷懒”心理. 为此需要培植，或说需要严格要求与正面激励“二象”并举，否则如果让其负向的“感染”力占去上风，那就是另一种风气了.

当然，培植班风是另一门艺术，不是此小小篇隅所能及的，不得不点到为止.

7. 自信心决定学习效果

在体育比赛中一个自信心不足的运动员是不可能取得好成绩的，运动员首先要自己战胜自己就是要真正树立起自信心来.

在学习上同样需要树立自信心，否则即会失去克服困难的毅力.

当然这个自信心的树立也是以一定的知识基础为前提的，因而不是盲目的，否则即成为骄傲了. 实际上这也是个虚、实“二象”关系问题，知识基础属实象、自信心属虚象，二者是互相匹配的. 一定的基础上即应该有相应的自信心，二象中缺了任一象都会使另一象得不到充分发挥. 所以在既有的基础上既不可缺乏自信心也不可自信心过分.

为什么一个数学出身的人其数学能力较之一般非数学出身的人来说，其进步往往要快一些？已说过，除了一定的专业压力之外，他比别人更有自信心也是一个主要因素. 哪怕只有一点点差异，日积月累也必然显效.

教育学上有一个“罗森格尔效应”，说的是 1906 年一位叫雅

各布的小学班主任做了一个实验，有意告诉每位新来的老师说某些差生很聪明，学习好，给老师提供错误信息. 的确，一段时间后发现这些学生中大多数人的成绩都不同程度地上升了. 显然，这是通过教师的信任增强了自己的自信心所产生的效果.

赏析六
数学的“自嘲”

数学的抽象性、精确性、技巧性，数学语言的特殊性和历代数学名家中种种聪明故事，给人们以深深印象，似乎数学玄、数学难、数学神秘，数学是绝顶聪明人干的事，以致在学生中乃至一般知识分子中产生了种种非正常的“数学心理”和“数学行为”，好像真有必要作为一门“数学心理行为学”来研究和应对似的.

当然，其中固然有可鼓舞的一面，但所产生的负面效应也是更为严重的，不可低估.

比如生活中，朋友新交，当知道某某是数学出身时，往往油然而生敬佩之情，心里自然在想，此君一定聪明，多值得羡慕啊！当然这种崇尚数学的心理并非坏事，但若由此形成了对自己的不信任，遇到数学问题时总想到我不是数学出身，甚至认

为自己没有数学天赋,对自己失去了信心,倒是很不正常的了.

那么,本章即是要说明,事情并不是那样的. 其实任何一个行业内都既有聪明人也有普通人,并且更多的是普通人,数学中同样如此. 进入任何一个专业,80%的还是得靠后天努力. 只要有信心谁都可以进得去数学中的.

为了说明这些事实,澄清一些误解,我们将从一个特别的视角去观察一下数学——以“揭丑”的方式进行. 这时我们会发现数学的系列事实好像是在自我嘲弄,自我讽刺似的. 那么它为什么会这样呢? 它能带给我们什么样的思索……

这样做当然也是符合本书作为赏析性读物宗旨的.

本书最终是要说明数学并不可怕,数学家也并不神秘,人人都可能成为数学家,特别是应用数学家. 其实可以说各个学科中的成功者们都是应用数学家.

6.1 所谓数学的精确

人们赞美数学的精确美,似已达到美轮美奂的地步.

本节则要说明任何事务都不是绝对的,数学的精确性也是这样.

首先将从数亦即数量的精确问题谈起,最后落实到整个数学的精确性问题上来.

6.1.1 数量的精确是什么?

记得小学时一次在数学作业中把 9 写成 0 而挨了老师一

顿批评，令人一想起来都略觉心悸，后来才知道老师的用心. 想必每个人的学习史中都有过类似事件发生吧！

是的，数是最具有精确性的，比如财会账目，差一分一厘都会使账目失去收支平衡，都得把原因找出来方能罢休，何等精确.

又如，$\pi=3.14159$ 比 $\pi=3.1416$ 精确；$\sqrt{2}=1.414$ 比 $\sqrt{2}=1.42$ 精确等. 何等严密，这些都无不体现着数量的精确性.

那么，数量真的是精确的吗？

为回答这个问题，首先得回答精确是什么？

仔细揣想起来才知道，原来精确这个概念本身并不“精确”. 这也许要算是数学的一个自嘲吧.

事实上精确只是个相对概念，它需要有一个比较“标准”. 对于不同的问题，这个标准可来自多个方面. 比如在度、量、衡等测量仪器中，这个标准统一来自国际度量衡组织的共同约定.

例如，仅就一个平凡的长度计量标准，也还一直随着科技和时代的进步而追逐着它的“精确”呢. 最初是在18世纪末由法国创立的以子午线四千万分之一为单位的“米原器”；1927年改为国际米原器，用两刻度间距离来定义；1960年改为用氪-86的光波波长来定义；1983年则改为以真空中光速不变原理来定义；现代用的测长仪一般是测长干涉仪、光栅感应同步器、磁尺、电栅和直线编码器等.

显然，就连一个长度的计量标准的精确性也是个没有止境

的问题.

一般说，具体到每一台计量仪器，在出厂之前都得对它进行“统计测量”，以确定出它的精度，便于用户在应用时有个精确的标准作为依据.

在生活中用到数量时常常也有个精确标准，不过这个标准一般来自心理，只是个“心理值”罢了. 比如，乡间集市上柴禾买卖中常常用所谓“估堆”的方式即认为精确了，但在买卖粮食时则需要秤来称量，才认为精确. 特别在诸如滋补药材、海味山珍之类珍品交易中，更要用所谓“戥”称才能满足其心理的精度了.

此外，比如对于一个企业或一个部门，当谈到其经营状况或运行状况时，其精确标准一般来自收支（也就是借贷）平衡概念，或其引申出来的盈亏说法. 当说到发展问题时，还有个更为明确的“比较”标准，那就是以前一年或前一（比较）期的状态作为标准. 比如说我国 2006 年 GDP 增长率为 9.8%，那是以 2005 年的 GDP 作为比较标准的.

真要说来，只有从哲学意义上来说的才是“精确”，而且还是绝对精确. 这是因为哲学的宗旨是认识客观世界本身，强调的是客观实际，不管你自身的能力如何，都要致力于以其认识对象的客观存在作为标准.

但是这谈何容易. 哲学上的那个绝对精确不过是个镜中花、水中月，是捞不着的.

由此足见，所谓数量的精确其实并不精确，原因在于精确概念本身就不“精确”，它只是个相对概念而已.

这一来也就回答了数量的精确性了.

其实与其说是数量精确,不如说是数量“准确”. 比如说 3,它就不是 2,也不是 3.1,这就是一种准确. 再如说这一袋水果多,就不如具体说出它有 5.5 斤重准确. 至于说到精确那是另一回事,另一个概念了. 若买了 5.5 斤水果去看生病的室友,过后在向室主任汇报时,说买了 5 斤多水果就算是精确的了,但向会计科报销时则必须说 5.5 斤才算精确呐.

6.1.2 关于度量的精确

我们买菜时,卖家拿起一棵白菜一称,二斤八两,请问怎么来理解这二斤八两? 难道真的是二斤八两,不多不少?

你去量身高 1.69 米,体重 65 公斤,难道真的就是那么多?

反过来说,如果量出一个人的身高为 1.692 035 米,体重为 65.003 320 1 公斤,我们会有什么反应呢? 显然只能感到吃惊、可笑、嗤之以鼻,因为完全没有必要,也不相信这就是精确.

可见度量的精确与否是掌握在我们心里的……

再问,数数也是一种度量,且是一种简单的度量,那么数数精确吗?

我们说它同样不精确,关键是它的单位(量纲)不可能精确. 即使说同一个盘里有五个苹果也不可能是五个“同样”的苹果,这时候说它有五个苹果实际上是暗含了一个公理作为前提,那就是以五个苹果的“均值”作为统一的标准量纲.

那么,苹果真正的均值能得到吗? 显然也只是个抽象概念. 只是说需要的时候可以去作“统计”——又一层的近似度量罢了.

6.1.3　人类只生活在有理数集上

不管是生活中遇到的度量实践还是科技活动、科学实验中遇到的度量实践，包括直接度量和导出度量，只要形成了具体的数，都是有理数，这已是人人都体会到的事实. 甚至可归结成一个定律.

定律　人类只生活在有理数集上.

也就是说，我们在科技生活、现实生活中用到的数、实现的数，都是有理数.

这就出现两个问题，要么是实数中只有有理数，没有别的数了；要么就是我们所作的度量不精确.

可是我们在度量时够认真的了，够“精确”的了！

无怪当初毕达哥拉斯会犯“有理数错误”啊！看来即使是“绝顶聪明”的数学家在那样的时代也是有可能犯错误的.

其实，这在还没有哪怕只是认识到实数成分构成的时候，最容易犯的错误. 反过来倒应该说，在那样的知识背景下能够提出“有理数猜测”已经是聪明的表现了.

那么问：有没有“现代的有理数猜测”呢？

人类可以生活在有理数集上，但客观世界不只是有理数的，科学不只是有理数的，因此人的思维不应该只停留在有理数上.

6.1.4　关于精确的几则故事

1. 邮票的故事

一则流传甚广的笑话说，一位小朋友去邮局邮信，邮政员称

量后说，你的信超重了，还要贴一张邮票才行. 小朋友不解地问，既然已经超重了，再贴一张邮票不更重了吗? 弄得连邮政员都很茫然了.

一般认为好笑之处仅在于小朋友不知道贴邮票的意义，误以为只是个加重邮政叔叔负担的问题，殊不知邮政叔叔的力气也是称过来的，邮票愈多他的力气就愈大.

另一个好笑之处在于，这位小朋友的精确意识太强了. 他不知道一张一般的邮票仅 0.1—0.2 克，而一封信件的基本限量是 20 克，由于天平的最小刻度为 1 克，称量信件的误差至少是 1 克，所以区区一张邮票重量在这里是无足轻重的，小孩子的“计较”是没有意义的，是幼稚之举.

可是，还真有大人为这点邮票重量较真，且闹到法律上去了呢. 据说在西方某个国家的历史上就曾发生过所谓“邮票法案”，终于用法律条款的形式规定下来，“邮票重量所产生的费用由投寄方负担”. 其实这不是个可笑的事，倒是个严肃的事. 它体现了法律的“精确”性，也就是严格性.

2. 蛋的故事

生活中关于蛋的寓言、俗语、故事不少，诸如鸡飞蛋打一场空，鸡蛋碰石头——“硬碰硬”，危如累卵，鸡蛋不要放在一个篮子里(组合投资学名言)，哥伦布立蛋的故事等. 但也有这样一个关于逻辑“精确”性的故事.

一位餐者刚买来一份煎蛋，一看有他爱吃的同样价格的蒸蛋，便用煎蛋前去换了一份蒸蛋吃. 此君用完餐后便要起身离去，这时店家提醒他还没给蛋钱，客官问“什么蛋钱?”店家：“一

份蒸蛋的钱啦”，客官：“蒸蛋是我拿煎蛋给你换的呀！”店家：“可是煎蛋你没给钱呀.”客官：“这煎蛋我不是没吃吗？”弄得店家一时懵了，反倒说不上来了.

3. 如今的天气预报不再像从前那样，仅凭观测数据加简单计算再加历史对比和经验综合而成.而是凭借一台浩大而先进的计算机，依赖一套高级的数学模型和软件独立计算、评估而成.它得出的结论是什么就是什么，有时候就算凭经验认为它有错误，也不敢修改，因为它是科学技术，是算出来的，是精确的，只能相信它.

但这一来有时候就会出现诸如“天气回报”、“天气谎报”之类事件(当然，一般只是笑话).

这种笑话实际上也是数学的“精确”性产生的.尽管说这是预测，本身是存在概率风险的.

4. 课堂考勤不可能每次上课都进行，一般是一个学期只随机抽查几次，可老师却宣布，几次抽查中都缺席者取消考试资格，理由是“根据统计科学的结论”你完全缺课.但显然这只是小样本下的统计结论，是不够精确的.可是这里也采用了，实际上是“认定”了科学的威严.

但这一来可能就有人倒霉了.出勤的时候未考勤，未出勤的时候考勤了.

在这样的数学“精确”性面前，只能表示无奈了.

其实都知道，数、理、哲是相通的，因而哲学的“非精确”性与数学的“精确”性之间是有个交汇域的，那么在这个交汇域中，数学的精确性自然会表现得不那么完善，于是它的“自嘲”机制就

这样产生了.

6.1.5 所谓数学的精确性

已经看到了,既然人类只生活在有理数上,而客观世界又不只是有理数的,哪还说得上什么精确呢?反过来说,如果在这种背景下来理解数学的精确又应该是什么含义呢?

显然,数学的精确应该分作两类,一类是指数量的精确,另一类是指逻辑的精确.业已表明前者——数量的精确是个相对概念.不过作为后者——逻辑的精确仍然是个相对概念.

在数学中特别是纯数学或叫基础数学中,基本上涉及的都是逻辑推理,其推理的形式也是文字符号和符号语句表示的变数,极少直接运用数量,更少涉及度量的情形.因而它们更多涉及的是逻辑的精确性.

在应用数学中,可说数量的精确和逻辑的精确都涉及的较多,具体是愈靠近应用基础者涉及逻辑精确的愈多,愈靠近应用实践者涉及数量精确的愈多.

总之,这就说到了数学的逻辑精确性问题.

逻辑精确的相对性主要表现在逻辑推理的形式,或说其模型的构成是有前提条件的,这就是公理前提或叫公理条件.

公理的稍有改变都将引起推理过程和结论的改变,所以逻辑的精确性也不是绝对的.

总之,人们在赞美数学精确性的同时必须看到,所谓数学的精确性不是绝对的,只能是相对的.

6.2　数学高塔尚待建地基

数学，自 19 世纪下半叶以来自然地分化成了应用数学和基础数学两大范畴. 在今天尽管应用数学已得到充足发展，但也不能不承认，整个数学的主体还是纯数学，也就是基础数学. 而 19 世纪末以来纯数学都以“建立自己的数学‘象牙塔’”而自豪，作为所有关心数学的人，无不同声祈愿数学“象牙塔”工程——人类这座“巴比伦通天塔”的顺利平安.

那么在这样的时候，我们却要说，数学这座高塔连地基都还没有找到哩. 这不能不说是数学的又一大“自嘲”了.

不过，我们也不必过分吃惊. 原来几乎所有理论科学都是如此. 这也是当年马克思所说，“科学家和其他建筑师不同，他不仅画出空中楼阁，而且在打下地基之前就造起了大厦的各层居室”.

的确如此，比如物理学、生物学是迟于 19 世纪末 20 世纪初才进入到自己的理论基础发掘阶段的. 即使是数学这个发展了几千年，备受人类尊崇的，并被认为已经是很基础的科学，也是在 20 世纪初才进入到自己的地基工程阶段.

本节通过对它的“自嘲”可进一步体会到，科学特别是数学这样的理论基础门类，其精确性、严密性是怎样表现出来的，应该表现在哪里.

6.2.1　数学至今连实数都没认清

似也奇怪，比如如此发达的医学至今还制服不了区区感冒；

如此高深的数学至今连个实数也未弄清.科学也够自嘲的了.

其实第一章已经知道,数学从来都是在围绕着实数认识而发展起来的,可以说数学史就是个实数认识史.从四则算数认识到了有理数,直到八则算数认识到了无理数;从代数学认识到了代数数,直到π、e、sin 1、cos 1等认识到了超越数.既是在实轴(实数集)上的运算,也是对实数的认识.

同时还从测度论角度得知,有理数集比较起无理数集来,无理数要多得多.实则有理数集的测度为0,而无理数集的测度却为所谓“全测度”呐.

其实这本身就是个十分发人深省的现象.试想(直观看来)整个实轴不已经被有理数集“充分”地占满了吗,哪还容得下无理数的什么位置?更何况还说“无理数所占空间才是主要的”哩?

也的确,就在对无理数概念的接受,特别是对无理数集的“全测度”结论的接受上,数学界也是长期未能得到顺畅通行的.即使在数学名家中,比如直到17世纪也还有牛顿对无理数想不通,19世纪还有克洛内克、庞卡莱对无理数想不通,20世纪还有布劳威尔等也对无理数想不通.甚至曾产生过不少争辩,先后有不少人表示过来自多种角度的怀疑.可见今天的无理数名不虚传,在历史上还真的长期处于“无理”状态呢.

为说明无理数结构在实数结构中的关键地位,这里冒昧举出一个有助于说明问题的鲜活实例.最近笔者再次收到一份来自一位非数学界人士的手稿,要我们给提提意见.文中对实数集做了这样的处理,赋予了每个无理数一个所谓“真无穷小”邻域,

并且视此真无穷小邻域为基本单元，不再管它的结构了. 这一来实数(亦即实轴)的结构也就很容易地被“弄清楚”了. 甚至还能宣布康托连续统猜测、公理集合论等都是故弄玄虚，没有必要的事了……事实上他是没有看到一切问题的关键就在于那个被他忽视了的“真无穷小”的结构，也就是无理数集的结构. 其实这位非数学界朋友的思维水平已经接近百多年前数学的前沿水平了，遗憾的是在现代看来，即显出思维层次的不够了.

总之，现在终于可以说了，原来无理数中隐藏的问题是非同小可的，历史上未能得到解决，甚至说未能得到(历史的)正视，那只是时代未成熟的表现. 也因此才有后来从另一角度重新爆发出这一实质问题的伟大事实：

19 世纪末 20 世纪初，对实数的认识进入到了一个新的阶段——实数的集合论认识阶段.

6.2.2　实数认识进入康托集合论时期

已知，康托集合论使数学知道了数学最为基本的对象是“集合”. 也使数学知道了，数学最为基本的关系是“序”.

在康托集合论下，康托把可数无穷集归于一个类，叫做可数集类，证明任一有限维欧几里得空间的有理数集都是可数的，皆属于可数集类. 继而推广集合元素“个数”的概念，提出一个“势”概念. 指出可数集类中任一可数集的“势”都是相等的，且皆与自然数集能够产生一一对应，因而它们是同势的，记其势为$\aleph_0$.

进一步，康托参照有理数集的测度为 0，无理数集的则为全测度这一结论，提出无理数集具有不可数性，也就是实轴连续统

具有不可数性，记其势为$\aleph$，这就自然产生了一个$\aleph_0$与$\aleph$之间的比较关系问题，也就产生了系列有名的康托连续统猜测问题.

我们说，正是借此，数学又从集合论角度再次切入到无理数集的结构问题了. 这次可不是擦肩而过，而是正面迎着问题上了. 也是时代进展已经到了这一步的表现.

特别地，正是在此探索、证明连续统猜测，以揭示实数集结构实质的过程中，一系列的集合论悖论相继发生了.

6.2.3 数学悖论揭示出数学的根基问题

有人说，悖论是上帝玩的魔术，它总爱让这些只生活在形式逻辑范畴内的凡人们摸不着"头脑". 即使在数学上也是这样，甚至在数学中这一"魔术"还玩得更加频繁. 可以说数学发展史就是沿着悖论的脚印一步步走过来的.

已谈及，在康托集合论系列悖论中，核心问题就出在"集合的集合"这一结构关系上.

比如，罗素悖论说，"一切不属于自己的集合的集合是无所适从的"，从数学角度说，即：设$X=\{x|x\notin x\}$，则$x\in X$与$x\notin X$都将产生矛盾(赏析二中已谈及罗素悖论，那是罗素改编成的普及形式"理发师悖论").

这一悖论的发生，向数学提出了一个严峻问题，那就是"数学的根基何在?"也就是说至此所考虑的无穷集、不可数集，仍然不是完全的，仍然存在当前(至少是既有)数学无法考虑进去的纰漏，致使数学不得不再走"公理化"道路，回避掉那些目前还处理不了的成分，把它们作为前提条件承认下来. 这就是公理集合

论的背景.

可是,在公理集合论中半个多世纪来,仍然未能走出一条路子,就连要建立一个“公理体系”也很难建成,比如其中所谓“ZFC 理论”即是如此. 经过半个多世纪的折腾,至今就连这一公理体系中第九公理的“独立性”也还没有理出个头绪来,时而证明第九公理与其他公理独立,时而证明它与其他公理不独立,弄得越来越糊涂似的.

总之,虽然从数学的玄妙、深刻性来看,不能不承认数学的高塔既高且深. 但也不能不承认数学至今别说完善其基础,就连它的根基、基底在哪里也还没有找着似的. 真够“自嘲”的了.

6.3　也说数学是猜出来的

在越来越赞美数学最为精确、最为严谨的 20 世纪 50 年代,当世界著名数学教育家 G・波利亚喊出“数学是猜出来的”时,却立即引起了全世界数学家的共鸣,得到了世界的赞同,这是为什么呢? 可谓数学的又一个“自嘲”事实了吧?

G・波利亚(1887—1985)出生于匈牙利,后定居美国,长期执教于斯坦福大学,任数学教授,二战后出版了系列数学教育专著,因此享誉世界. 其中《数学与猜想》的序言中写道,“严格地说,除数学和论证逻辑外,我们所有的知识都是由一些猜想所构成的……”(见《数学与猜想》(1、2 卷),李心灿等译,科学出版社出版,2001 年).

此话被人们形象、鲜明地总结为:“数学是猜出来的”.

以此为人们津津乐道. 那么要问:为什么世界数学对此结论能有如此鲜明而似显“过激”的响应和反应呢? 看来这不是一种自嘲,倒是一种对客观规律和客观实在的认同和共识.

根据波利亚的理论,这里可以归结为如下三个方面来诉说.

6.3.1 合情推理与猜想

经验充分表明,数学不管是其历史发展途径还是一项成果的形成过程,都是从不精确过渡到精确,从不严密过渡到严密的. 这个“不精确”、“不严密”的阶段,波利亚叫它做“合情推理”阶段.

波利亚更以充分的范例分析指出,合情推理在数学过程中是更为重要的.

正如 6.1.4 节中谈到的,哲学的“非精确”性与数学的“精确”性存在模糊、过渡和交汇域. 那么合情推理正是在这一交汇域上表现出的特征.

特别地,合情推理也是数学创造能力的体现.

所谓合情推理,简单说来就是一个在不太充分的事实启发下提出一个猜想,再经一个不太充分的推理手段运作而使其思想或猜测事实得到进一步巩固的过程.

也就是说,一个合情推理过程的根本就是为着一个“猜想”的由暗变明、由模糊变清晰、由信心不足变得信心十足的过程.

牛顿又曾说过,“没有大胆的猜想,就做不出伟大的发现.”

波利亚也说,“要想成为一个好的数学家……你必须是一个好的猜想家.”

看来猜想确实十分重要.

思辨分析易知，在数学开发过程中为了这个“猜想”，可分成提出猜想、巩固猜想、实现猜想这样三个阶段. 那么前两个阶段即是合情推理阶段，后一个阶段则是数学的精确推理过程. 下面着重讨论一下合情推理(又叫猜想)的两个阶段.

6.3.2　猜想的提出：归纳

归纳，又叫做猜想的形成，它是合情推理的发端.

首先应该承认，归纳是个十分复杂的问题，也是个十分深刻、精妙、有趣的问题.

只有警觉到归纳的复杂性和深刻性，才可能说得上去承认这里有个精神层次上的问题，比如灵感、感悟、省悟、领悟等.

直观说来这就是个启发、归纳、提升、领会问题. 特别是其中“归纳”一词，已经成为流行说法了.

所谓归纳就是综观一些事实、事例和现象，使脑子里升华出一个想法来的一种精神现象. 这里一定要强调“升华”这个提升的实质，它绝不是在同一个平面、同一个层次上来说的. 它是一种创造、创新，它能够产生由点到面、由表及里、由现象到本质的质变. 但这必须通过(或最终是通过)人的大脑和精神的作用才有可能.

比如可以说几乎所有数论问题的提出都是“归纳”出来的. 比如已知数论三大世界难题之一的费马猜想：不定方程 $x^n + y^n = z^n$，$n > 2$，$n \in \mathbf{N}$(自然数)没有整数解. 不难想象 1637 年当费马提出这一猜想时勾股定理早已于毕达哥拉斯时期得到，想

必他是发现除了 $n=2$ 有大量的勾股解外，比如 $n=3,4$ 时未找到解，便一下子产生了如此一般猜想的(已谈及，此猜想在 1994 年已为 A·怀尔斯解决.)

又如，我国数学家徐利治(1920—)在 20 世纪 80 年代初，一个偶然机会对既知的离散数学反演公式和解析数学反演公式产生了一个“归纳”性猜想，提出二者之间可能是统一的或说它们具有内在联系. 经过合情推理阶段的思考巩固了猜测、树立了信心，进而致力于对这一猜想的证明. 终于在两年后用“非标准分析”工具完成了这一工作，证明了这一猜想的正确性.

显然，这里所论归纳不同于数学实证中的“归纳法”. 尽管我们这里也是在谈数学，但前者是含哲学意义的，后者才是数学内的，属典型的数学内容. 具体说来在归纳法中，提出问题(提出猜想)和正式证明的前两步(检验 $n=1,2$ 成立；设 $n=k-1$ 成立)都是属于上述“归纳”内容的，只有证明 $n=k$ 这一步才是纯数学的.

6.3.3 猜想的巩固:类比

在一个猜想提出之后，思想必然处于兴奋状态，这时一个通常的表现是会马不停蹄地立即致力于去证明自己的结论(注意到猜想的核心形式是一个结论，或完整地说是一个命题、定理). 当然往往不是一下就可以得到证明的，否则这一猜想一定是很初等的，或说是低层次的，这不必说了.

总之，在刚刚提出猜想时的非严格“证明”阶段，有一个十分重要的行为特征，波利亚叫它做“类比”.

类比是用同类事例去对自己的猜想作“例证”. 尽管在一般条件下用“举例”的方法是不能证明一个数学命题的. 但也不可讳言,成功地举例是可以增近(或明晰)我们对自己猜想的信心的. 因此类比也成为合情推理的一个重要阶段.

比如当年阿基米德发现浮体定律的故事即属一个典型的“类比”事例. 当他脑子里担负着测量皇冠中黄金纯度的任务时,“盆浴溢水现象”这个平常生活中见惯不惊的东西立即引起了阿基米德的思想升华. 这就是“类比”这一心理行为的自然表现.

又如,不难想象,当初欧拉给出关于正弦函数 $\sin x$ 的“欧拉公式”

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

是因为他联想到多项式分解出的因式对应着多项式的根,而 $\sin x$ 是一个无穷多项式

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

而且 $\sin x$ 在 x 轴上有无穷多个 0 点(无穷多个根),是否可以把每个根特别是正负根对偶地纳入因式关系呢? 于是思路打开了,成果即指日可待了. 这应该是“类比”产生创造的一个实例. 特别地,可以说后来高斯的高次代数方程基本定理和克朗内克的多项式因式分解定理,不能说没有受到欧拉乘积公式的“类比”思想影响.

6.3.4 数学也是想出来的

的确,数学不仅需要猜,需要合情推理,也需要充分调动思

维能力去想，甚至不惜“想入非非”、“冥思苦想”. 当年哈密尔顿为一个乘积式不满足交换律的问题苦苦思索了 15 年，终于在一天晚饭后的散步中豁然开朗：不满足交换律就不满足交换律嘛，这不就是该乘积关系的一个性质吗？于是问题即以不解决的方式解决了(不过那也是一次思想升华啊). 这是“想”出数学来的一个典型范例.

又如笛卡尔于 1619 年 11 月 10 日晚上一连做了三个关于解析几何的祥梦，因而这一天被后人誉为解析几何学的生日；洛蒙索夫在梦中解决世界难题(醒来后还画出了梦中点拨他的高人，酷似对数发明人内庇尔，如今此画还存放在普希金博物馆里)，等等. 出于忧则生梦，苦思则梦原理，这些都应该是“想”出数学来的例子.

已故中国数学会名誉会长、院士柯召(1910—2002)教诲学生要善于运用“三上”——路上、厕上、床上的时间思考问题. 因此在“文化大革命”期间受到的批判中，这也成了被批判内容之一.

还记得一位数学人年少时在其家乡念初中，只能到田边洗衣服，因此常在去洗衣的田坎路上画出待解的问题或几何图，并写上“拦路虎”三字，逼着自己去想，而且在回来之前必须想通，否则不准通过.

此外，数学还需要拼凑. 别以为文献中语言光顺、逻辑亨通，显得作者十分神笔，一气呵成似的，其实他们的草稿纸比稿子多得多.

每个优秀的模型，合理的公式，有效的结论，往往都不是一

气呵成,都是要经过反复修改的,因此也可以说是拼凑而来的.

其实,数学哲学中三大流派之一的“直觉主义”主张数学应该是能够实现的、能够构造出来的,说穿了就是要能拼凑出来.作为一大流派其影响一直都是很大的.

可见,数学也是拼凑出来的.

6.3.5　猜想的实现:实证

作为数学活动中最具创造性也是最为活跃、最难把握的阶段固然是上述合情推理阶段,也就是猜想、猜测、归纳、类比过程,但毕竟数学成果的最终获得还得靠严格的实证过程.这里“实证”一词的含义,在工程科学中系指技术地实现,在自然科学中系指实验的获得,在数学中系指逻辑地证明.

一个数学猜想的实证过程是个严格的形式演绎和逻辑推理过程.一般说来这才是数学课本中、数学课堂上正式记载的.因此,相对来说一个猜想的实证、推演、演绎倒是比较容易掌握的.

可是通常所谓数学玄、数学难,数学精确、严谨以及引起人们对数学产生畏惧感的恰好是这个推演、演绎过程,怎么解释呢?

我们说,一方面正如所述,数学书本记载的一项项内容都是一代代先人们分别经历了归纳、类比、实证过程后,得到的一项项成果,再经几千年的锤炼、累积、沉淀而成.其中包含了种种技巧、创造和精妙的思想,要求我们在十分有限的几百个学时内来掌握它,尽管相信今天的我们智商和接受能力都有所提高,毕竟还是有困难的.这是必须承认的,不能认为是我们笨,而是时间

给我们的任务太重.

但是,站在客观位置来说或站在数学需要创新、需要继续进步的角度来说,仍然得承认:演绎推理能力固然重要,而合情推理能力的培养更为重要.

诺贝尔奖得主,美籍华裔学者杨振宁教授说过,他在中国学的是演绎,在西方学的是归纳.当然我们不能作绝对的理解,那只是说中国的特色是更注重逻辑演绎和推算这种相对说来比较模式化的、书本化的能力培养,而西方则更注重归纳(合情推理)类比这种更具创新性、创造性的能力培养.

总之,这里似乎又是一个数学的“自嘲”了.本来具有严谨性、精确性的数学,其严谨性、精确性反倒不是最重,倒让合情推理、猜想、归纳、类比成为最重了.

可是,这的确也是应该.

6.4 数学教育的困惑

教育,从古代的民间自发产生,近代的政府参与促进,到现代的教育理念革新,一直走着一条上升之路.

教育,各个国家和民族都有着自己的教育家和学派,特别是古老民族的教育成了它们文化传承的核心力量.

特别自上世纪60年代诺贝尔奖得主舒尔茨、刘易斯等提出教育的预投资理论、人力资源理论以来,掀起了一场深刻的教育理念革命.

如今教育已发展成为一门宏大的科学,普通教育、职业教

育、终身教育;精英教育、大众教育;教育学、教学学等层出不穷,规模越来越大、层次越来越多、概念越来越细.

在今天,全世界政治家无不认识到“教育兴则国兴,教育衰则国衰”的真理.

教育,对于每个人来说,谁不希望自己学业有成?谁不希望自己的孩子学业有成?

但是,效果怎么样呢?教育遂人心愿了吗?

不能不说几千年来教育一直在折腾着,如今更感到愈来愈困惑和迷惘.

那么,这是不是对教育的又一个“自嘲”呢?教育的出路何在?

原来本质在于教育是“教练”,教育是外因,“外因是条件,内因才是根据”,教育者不可能替代被教育者的劳动.知识的传授不是物质的馈赠,而是要在被教育者脑子里去诱发、重生.

这一根本机制决定了教育是用外因去改变内因,只能是“隔靴搔痒”,但是还不能不这样去做,哪怕是事倍功半也得去做,还得努力去做.

特别地,一般教育既然如此,我们这里所要考虑的数学教育那就更甭说了.下面即着重就数学教育问题谈谈它的“自嘲”之难.

6.4.1　数学教育的折腾

不用说,人们对数学教育的期望值是高的,企望着数学能有个大的突破,好让数学变得不那么神秘,好学一些.的确,一代代

数学教育工作者也都做着这同一个梦，不过其成效之微是有目共睹、可想而知的. 但有一点值得肯定，那就是历来在著名教育家中，数学教育家所占比重都是很大的. 比如从我国的数学老院士到世界的沃尔夫奖得主，亦可看出，他们大多数晚年来都热心教育，特别是数学教育. 说明数学家中对数学教育重视的人是很多的.

此外，数学教育的学派也是很多的，有名的如法国的布尔巴基学派，苏联的基洛夫学派，美国的波利亚学派以及平面几何改革派等.

数学教育的任务是把既有的数学知识整理出来传授给学生. 它的重心是教、是传授，因而主要是从教材内容的取舍、编撰和教学方法、教学艺术的探索上去下工夫.

当然，出于教育的“外因”原理，尽管数学家十分自信自己的聪明度，数学教育仍然摆脱不了与一般教育的相同命运——课堂效果总是不理想、不尽人意.

数学教育始终在释迷、解惑、开顽上折腾着.

不过，数学教育从来也没有停息过，哪怕只是“蜗步”式的前进，也包括对突破其“自嘲”窘境的探索.

6.4.2 教育数学的创立

教育数学是为着提高数学教育的效果，致力于对有关数学内容进行再创造，使之能从本质上更容易为学生所接受的数学教育学新分支.

显然，教育数学与数学教育的最大区别在于，教育数学重在

创新，不只是教学方法的创新，主要还在内容的创新，因此任务更重、更难. 也因此教育数学的特点是重在理论突破，属科研型、基础类.

教育数学是任职中国科学院成都分院的张景中院士(1936—)近年来创立的一门数学教育分支. 张景中院士是个从多方面表现出大跨度才能的传奇式人物. 不仅在政治生活、社会生活上经历了大跨度，而且在成果上有着从院士级理论成果、国家级发明奖成果，到新中国成立以来成绩突出的 179 名科普作家之一的成果等大跨度分布；在业务上也横跨了机器证明学、距离几何学、动力系统学和教育学，体现出又一类大跨度；在教育上也有着在大学少年班上与"数学神童"们一起玩"脑筋急转弯"到与硕士生、博士生们一起玩"思维大突破"的大跨度.

张景中院士既是一位杰出的数学家又是一位杰出的数学教育家. 特别在近年来，他把主要精力放在所创立的教育数学上，一个新的教育学派已在他和他的老搭档杨路教授的带领下逐渐成型.

教育数学首先在平面几何学上作出了创造性成果，一反传统的以欧几里得《几何原本》为模板的教材组织模式，采用了一套新创的以几何图形面积为中心的、以计算机为工具的知识放射型结构模式，既简单又有效.

总之，以上就是本已在为精密而奋斗，更要在具有"隔靴搔痒"实质的教育面前为克服"自嘲"而跋涉着的数学教育一瞥.

6.5 也谈数学家的聪明

聪明是个高维向量，每一个正常人在其中都占有他的分量和分量子集(子向量)，差别仅在其分量序号和分量子集的大小不同.

特别地，人们在自己的聪明分量外常常还占有一定的笨拙分量. 在聪明分量上用力越多，其笨拙分量也将越突出.

在数学家群体中，这一统计特征尤为明显.

6.5.1 丑陋的数学家

在人们心目中数学家群体是个聪明的群体，数学家们自己也这样认为，并引以为自豪，但也因此表现出了不少“丑陋”的事态来.

· 在写论文时不愿直接交代思想，要别人到其数学过程中去体会、去猜，有时甚至还要来点故弄玄虚. 原来并非为别的，只因为一篇论文就其思想往往很简单，一语即可点破，如果事先交代了就没有玄妙可言了，所以还是留着这点神秘让别人猜去好了.

说也奇怪，一篇论文如果你事先把底细(思想)点明了，审稿人还真的会产生一种简单、浅显的感觉. 反之如果让其到数学过程中去体会出来思想，味道就要“浓”得多. 好像还真有这一心理规律存在呐.

· 在一篇寥寥数页的论文背后必有一大摞草稿纸，在每一

个简单明了的公式后面总有一个繁杂紊乱的过去，甚至还可能犯过幼稚可笑的错误，这都是正常的. 可是正是这些代表了艰苦劳动的证据往往被视为一堆垃圾不屑一顾，从来不在人前提起，或说“这些‘垃圾’都被拂到地毯下面去了”，仿佛作者从来都很聪明、很天才，写文章从来都很顺利似的. 只有当一个人出名了需要报导他了，人们才会知道，仅仅围绕着他的中心成果而“保存”下来的草稿纸也塞了几麻袋！

· 在一个难题面前熬了夜、失了眠，终于解决了，可是第二天还强制住惺忪睡眼，在人前故作轻松地说，那个问题简单，只要作一个“如此这般”的变换就出来了. 正面说，他夜以继日、加班加点地工作而不邀功、不张扬，精神可贵. 反面说，他用如此大的劳动仅仅为了换得个别人的赞许，而且只是心里的赞许，不划算. 还不知道别人心里是否真的赞许呢，因为都知道数学家都很自信，是不轻易承认别人比自己聪明的. 其实这只不过是一种“丑陋”行为罢了.

· 数学家形象有两种，一种人和蔼豁达、平易近人，令人敬佩；另一种人气度傲慢、派生距离，令人生畏. 不过稍作观察即可得知，原来后一种人肚子里没货，怕人接近他，怕人讨教于他会使他漏底、会使他现丑，于是摆出一副架子来，让人不敢接近. 偶有一两个不知趣者或不懂事、“不识皇帝新衣”者前去请教，往往不是被讥讽两句就是被斥责一通，回答自然还是“这么简单的，自己去想想”，弄得一鼻子灰.

其实此君不知道有一个定律：外表越威严的人肚子里越空虚.

不过讨教者的精神倒是值得学习的. 真的不用怕,凡是遇到这样的人,就应该拿上两三个问题去试试他的肚子有多"深".

6.5.2 古怪的数学家

数学家,特别是那些心存祥梦,正在向着数学名家目标、沿着数学名家之路艰苦攀登、艰难跋涉的族群,他们代表了数学家的典型形象,那就是"古怪",也就是:

· 在路上,他大背肩地横挎着一个陈旧而泛色的"牛仔"书包,微曲着腰,微埋着头,一门心思地走着,但看得出来心里却十分充实.

· 在街上,他全然不顾左右的花花世界,尽管"遭遇"一群美人儿撞过,肩上留下一块槐香,一边走一边用手摸摸,还是照直前行着,直奔学术现场.

· 在桌旁,他时而闭目遐思,时而奋笔疾书,时而写,时而画,不一会即"生产"出零零乱乱几大张草稿,一个猜想基本上得到了证实. 好一个"象牙塔"工匠.

· 在社会上,他虽然与世无争,但也自命清高、看破红尘,因为他的精神空间是个高维空间和高层次空间,宽敞自如哩.

· 在生活上,丢三落四,漫不经心,腰系"麦比乌斯"带(扭曲后拴上的皮带),不修边幅、衣着不拘,甚至喜欢离群索居、孤芳自赏. 因为他觉得他的心、身在业务上已得到了充分满足,就像一位情痴投到情人怀抱里所感受到的那样.

有人说,只有"古怪"人才搞得出世界难题,我们说首先是世界难题使人变得"古怪",然后才是"古怪"人搞出了世界难题. 当

然，请不要嫌他古怪，他是乐在其中啊.

“古怪”的数学家常常反倒会可怜我们这些没有进入数学怀抱的“无情”之人呢.

（不过笔者更愿藉此吹股凉风. 那就是，过去社会上出于对数学的热情，对上述数学痴的举止、数学迷的行为表示了谅解，这是可以理解的，但后来者决不可对此“东施效颦”.）

特别在礼仪学愈来愈成为社会普及学科的今天，相对说来数学群体中的社交礼仪还是比较差的，显然这是不合时宜的，后来者必须看到这点才是.

6.5.3　笨拙的数学家

有人说聪明人才去搞数学，笔者认为更多的是数学使人变得“聪明”，从而使得数学人能有“聪明”的表现，也才给人以“因为他从来就聪明，所以才成为‘聪明’的数学人”的感觉.

原因在于一个人经常泡在数学环境中，对于“量”的关系比别人接触得多，日子久了仅凭自然也会产生一些“适应”的. 特别是好些传统的处理技巧和精妙方法，诸如归纳法、反演法、常数变易法、变量分离法以及箱箱原理、等价原理、极限思维、空间思维等，在非数学人看来好像很巧妙，此君太聪明、了不得. 但在数学人那里是前人创造的，不知传承多少代了，他们只是作为死方法学来的，且已成习惯、已进入下意识，毫无新鲜感了.

总之，笔者见到的数学家并非都是很聪明的. 聪明人、勤奋人在哪个行业里都多. 有人戏谑道：在数学家中有既聪明又勤奋者，有聪明而不勤奋者，有勤奋而不聪明者，有既不聪明又不勤

奋者，什么人都有. 其实哪个行业都是这样的.

特别地，在数学中还不乏迂腐者，恐怕也不亚于古文学专业吧.

比如，据本人以及本人所知，经常有知识分子乃至数学家在菜市场上，为一个小小豆腐账、蒜苗账什么的，脑子反应常常还不如那些卖菜的菜农灵光.

曾经有个中午，本人刚下课去食堂，路经菜市场想顺便买点小菜带回家. 一斤芹菜喊价三角二分钱，我还价三角，讲成，称了三斤，我给了他九角六分，对方愣住了，可本人毫无所悟，最后还是对方提醒才"醒"过来. 由于不好意思拿回这六分钱，只象征性多拿一株芹菜以示平衡了之. 可是离开菜摊后又被叫住了，原来所带饭盒又丢在菜摊上了.

又有一位数学同事在去医院看望了住院的妻子后，去到市场买了一只"水盆鸡"准备回家炖熟给病人送去. 在路过市场门口时看到有个"公平秤"设置处，于是下了自行车，准备去约一下称. 此君将鸡挂在秤钩上称量了一下，"嗽，正确，小贩没有坑人哩"，口里念着，心里高兴着，于是登上自行车就往回赶. 到了家里准备炖鸡时才想起，原来水盆鸡还在"公平秤"上呢！

上世纪 50 年代的一天，一位数学名家老先生进城，在某商店买了东西，回家后发现少补了他两分钱，于是马上重又出门叫了一辆黄包车回去找到了那位营业员，问题算解决了. 旁人问他，先生为了几分钱却用去了一元多钱，还搭上一两个钟头的时间，值吗？他说，各算各的账嘛. 从此，这位数学家老先生的又一个迂腐故事便不胫而走了.

至于另一位数学名家在上世纪 70 年代初，一次去食堂的路上，径直低着头一门心思地思考着他的“1+2”问题，一头撞在树上仍没“醒”过来，还连声表示“sorry，sorry.”的故事已是人们熟知的了．相信类似的趣闻轶事在“古怪”的数学家中，在那些正在仰慕名家宝座的数学家群体中，人皆有之，只是表现形式的不同罢了．

看来数学家也有笨拙的时候，也有脑子不清晰的时候．好多人甚至表现为脑子只对自己的课题、自己的研究方向清醒，在其他的方面皆属其糊涂“分量”．其机理就在于数学家也只有一个脑袋，也是倍感不够用的人．

人人都可以成为数学家，特别是那些懂得“笨鸟先飞”的人、懂得持续力的威力的人、懂得坚持就是胜利的人，更有希望成为数学家．

6.6　请为数学解嘲

是的，数学就是这样，在宣称其严谨、精确的过程中又不断自我捅出“娄子”，自我揭发出不严谨、不精确的实质性问题，形成鲜明的“自嘲”．

是的，这就是数学，这也是数学的历史．

数学史就是这样一个不断发现“自嘲”，不断“逼迫”进步的过程．

正因如此，我们在“揭示”数学的自嘲时总会觉得言不由衷，总会发觉自己常常从揭嘲变成了解嘲，以致不得不随时提醒自

己注意“装腔作势”.

终于等到现在为之解嘲的时候到来. 这时我们要说:

• 数学正是靠“自嘲”——自我揭发矛盾、自我解决矛盾而得到进步的. 具体说数学就是靠发现悖论,解决悖论来推动它前进的.

• 正是在这一“自嘲”的过程中看出了,数学揭出的问题愈来愈深,也愈来愈没有个底了. 这就是今天的数学. 那么未来的数学呢?

• 未来的数学突破口在哪里? 我们在多本著作中亦曾谈到,看来还有待空间意识和逻辑范畴上的突破. 这是个质的问题而不是量的问题.

• 数学如果没有达底就始终不会有个真正的精确和绝对的严谨.

总之,数学在没有达底之前就回避不了自嘲的“尴尬”.

因此说,数学仅当它的“巴比伦象牙宝塔”通天之后,它的地基才可能真正落成,它的自嘲史也才有个终结.

所以,要为数学解嘲就是要积极揭露数学的“自嘲”,积极探索数学的自嘲的底线,而不是姑息、谅解和掩护它的自嘲.

为此也说,我们应该承认数学人,学作数学人,努力提高我们的数学修养.

所谓数学修养,关键就是数学思维,也就是数学家们的代表性的思维特征、职业特征.

所谓数学思维并没有一个明确定义,也没有个统一标准,除5.3.3节谈到的外,根据笔者的经验和观察,比较流行的数学思

维概念还可归为以下几点：

1. 空间意识，也叫空间思维. 在数学家的意识中，空间不只是牛顿空间 $\mathbf{R}^3$，也不只是爱因斯坦空间 $\mathbf{R}^{3+1} = \mathbf{R}^3 \times T$，而是一般的欧氏空间 $\mathbf{R}^n$（或记为 E^n），甚至是更为一般元素构成的空间——任意对象的集合. 特别在空间层次概念上也应该树立一个突破性的广义的意识，不要拘泥于一些不必要的老观念.

总之，有了广义的空间意识就有了广阔的心理世界，“胃口就好，吃饭就香”.

2. 函数意识，也是函数思维. 这时不在乎是否表出函数，只在于意识到其中有因果关系，主要表现是单因素还是多因素、是线性还是非线性. 对于非线性，其凹凸性如何，有无极值点、转折点等. 其实这些都是高等数学第一学期中学的东西. 只是需要把它形成习惯、进入意识罢了. 当然，这点得假以时日才行.

3. 均衡意识，又叫均衡思维. 纷繁的客观世界总是非均衡的，但它总是围绕着均衡点（或叫均衡状态）在动的，因此抓住了均衡点就是抓住了“牛耳”. 具体说就是要探索其均衡状态及其规律. 表现在数学中即是要寻找均衡的表达式. 比如对于一个消费者，仅从账目来说的均衡即消费预算(C)与消费向量(X)的总花费相等，亦即有消费预算式

$$C = P \times X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

其中 P 为价格向量，n 表向量维数. 若从消费者的心理上来说即其效用函数（记为 $u = u(X)$）在上述消费预算下的条件极值

$$\begin{cases} u = u(X) \to \max \\ s.t.: \quad C = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ \quad\quad X \geqslant 0 \end{cases}$$

如此等等.

4. 统计思维. 一般不是指统计总量，而是指平均，又叫统计平均，相应地叫做平均思维、平均意识. 比如社会生活中仅围绕一个“多”的概念也派生出了诸如大多数、很多、基本上、主要的、一般的等定性词语或说法来. 这在学过统计学或具有统计思维的人，则常常会作估计(哪怕是不精确的)，比如说成 60% 或 80% 抑或六成、八成之类定量述语. 应当意识到，凡是众多对象中的量比如社会中的量往往以统计量最有意义. 特别地，正如第一章中说到的，统计还有它更多的含义和意义，这里就不必重复了.

此外，还有诸如极限思维、极端思维、矩阵思维等，不可胜数，根本在于它将随着自己的数学修养深化而增加.